Orgaan van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

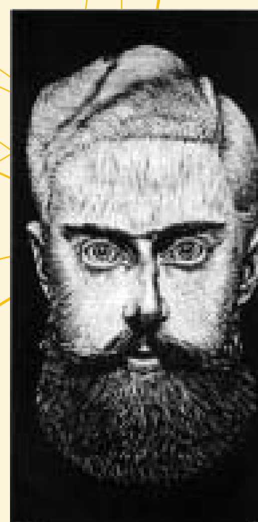
jaargang 73

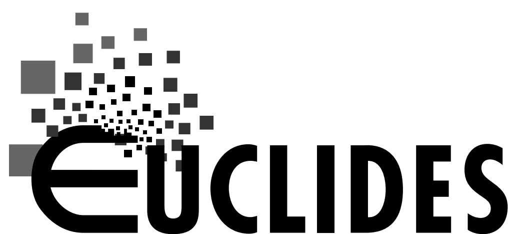
1997-1998 maart

6









Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor artikelen:
- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
  Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:
- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Contributie per ver. jaar: ƒ 75,00
Studentleden: ƒ 37,50
Leden van de VVWL: ƒ 50,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891.

Adresgegevens auteurs

A. van Asch
Benedenmolenweg 3D
4112 NS Beusichem

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

F. Bosman
Cito
Postbus 1034
6801 MG Arnhem

L. de Clerck
Vrije Universiteit
faculteit W & I
de Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam

M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

J. Schrik
Vuurdoornpark 34
2724 HG Zoetermeer

Y. Schuringa-Schogt
Novapad 4
5632 AE Eindhoven

A.K. van der Vegt
Hof van Delftlaan 47
2613 BK Delft

P. van Wijk
Poortstraat 38
3572 HK Utrecht

C. Zaal
Universiteit van Amsterdam
faculteit WINS
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Inhoud



200



202



210

van de redactietafel

Over wiskundeonderwijs is niet dagelijks iets in de krant te lezen. Maar soms verschijnen er toch opeens intrigerende koppen. Zoals bijvoorbeeld: 'Scholieren uit Nederland goed in wiskunde.' *(Volkskrant 25/2/98)* of nog mooier: 'Scholieren munten uit in wiskunde.' *(NRC 25/2/98)*.
Deze koppen hebben betrekking op een onderzoek uit de reeks van TIMSS-onderzoeken (Third International Mathematics and Science Study). Dit onderzoek is gehouden onder leerlingen van rond de 16 à 17 jaar (6 vwo, 5 havo, 2 mbo, 2 kmbo).
Nederlandse leerlingen bleken, internationaal gezien, bijzonder goed te scoren en eindigden bovenaan, boven landen als Zweden en Denemarken. Aan dit onderzoek hebben geen Aziatische landen meegedaan. Misschien dat de ranglijst dan anders was geweest. Maar de vergelijking met andere landen in West-Europa geeft een bevredigend beeld.
Ik vind het altijd prettig dit soort koppen bij de hand te hebben in discussies met bijvoorbeeld het hoger onderwijs. Daar wordt nog wel eens geklaagd over het middelbare wiskundeonderwijs. Veel beter dan deze leerlingen kunnen ze niet krijgen, denk ik dan maar.
In het persbericht van dit onderzoek was zelfs te lezen dat leerlingen uit 6 vwo en 5 havo die geen wiskunde meer in hun vakkenpakket hebben, beter scoren dan het internationale gemiddelde.
Meer informatie kunt u ook vinden op de internationale web-site van TIMSS: wwwcsteep.bc.edu/TIMSS

Wiskunde Olympiade

Afgelopen jaar hebben leerlingen ook goed gescoord in de nationale en internationale Wiskunde Olympiade. Daarover kunt u in dit nummer ook meer lezen. Het aantal leerlingen dat meedoet aan de Wiskunde Olympiade daalt echter licht. Dat is natuurlijk erg jammer. Op ruim de helft van de scholen wordt niet meegedaan. Op zich wel begrijpelijk met al het werk rond de Tweede Fase dat er op dit moment uitgevoerd moet worden in de bovenbouw van havo en vwo. Aan de andere kant is het maar één middag en is het goed voor het wiskundeonderwijs als er massaler zou worden meegedaan. Als u snel bent, kunt u waarschijnlijk dit jaar nog wel meedoen. De voorronde op de scholen is op 3 april.

Bestuur

In dit nummer ook een bijlage van het bestuur over plannen voor een nieuwe bestuursstructuur en een werkwijze die het adequaat invloed uitoefenen op zaken rond het wiskundeonderwijs in de toekomst kan garanderen. Het is tevens een uitnodiging voor een buitengewone algemene ledenvergadering op woensdag 10 juni. Uw kans om mee te discussiëren over de toekomst van uw vakvereniging. En dat zo'n vakvereniging zin kan hebben, kunt u ook lezen in 'Van de bestuurstafel' in dit nummer. Het ministerie heeft onder aanhoudende druk inmiddels besloten de eerste drie jaar de weging van de praktische opdrachten voor het schoolexamen terug te brengen van 60% naar 40%. Dat lijkt een wat behapbaarder omvang.

Bijdragen uit de klas

Ook in dit nummer een leuke bijdrage uit de klas: Bewijsopgaven in 4 vwo. Zulke bijdragen ziet de redactie gaarne. Stel uw collega's op de hoogte van leuke projecten die u doet in de klas. Het kost heus niet zoveel tijd. De redactie wil u er zelfs bij assisteren.

Kees Hoogland

NVvW

Buitengewone algemene ledenvergadering
van de NederlandseVereniging van Wiskundeleraren

Woensdag 10 juni 1998,
19.30 uur, Utrecht

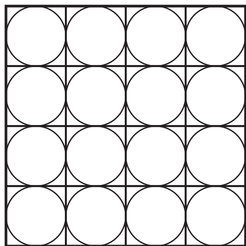
Ruimtevulling in hogere dimensies

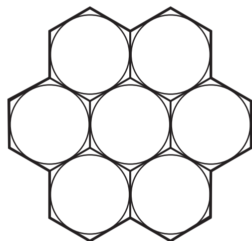
Verdwijnende bollen

H.C. van den Berg †
A.K. van der Vegt

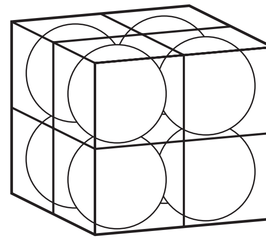
Inleiding

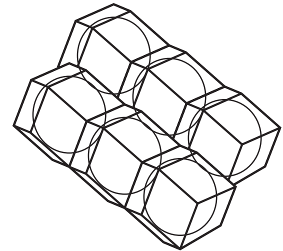
Als je een plat vlak wilt vullen met cirkels, is de eerste mogelijkheid ze te leggen zoals in figuur 1; het platte vlak is verdeeld in vierkanten en in elke vierkant past een cirkel. Hoe groot is dan de 'vullingsgraad', ϕ? Wel, als we de zijden van de vierkanten de waarde 1 geven, dan is de oppervlakte van een vierkant gelijk aan 1, en die van een cirkel $\pi/4$, dus $\phi = \pi/4 = 0{,}7854$.
Maar als je bijvoorbeeld zoveel mogelijk guldens op een tafel wilt leggen, dan is het al gauw duidelijk dat dit op een veel efficiëntere manier kan, namelijk zoals geschetst in figuur 2. De cirkels liggen nu in zeshoeken; we hebben nu een 'hexagonale' stapeling, en met een klein beetje gereken vinden we dat nu $\phi = 0{,}907$, inderdaad veel hoger.


figuur 1


figuur 2

We stappen nu over naar een driedimensionale ruimte R_3 en bekijken dezelfde vraag, maar nu dus met bollen. De eerste stapeling is dan weer, analoog aan de vierkanten in het platte vlak, die van kubussen in de ruimte (figuur 3). In iedere kubus met ribbe = 1 zit een bol met straal 1/2, dus met inhoud $(4/3) \cdot \pi \cdot (1/2)^3 = 0{,}5236$. De vullingsgraad ϕ is dus gelijk aan 0,5236. Maar ook hier kan het aanzienlijk efficiënter. Knikkers rangschikken zich in een zak heus niet in een kubisch patroon, maar in een veel dichtere stapeling. Kristallografen kennen dit: ze spreken over hexagonale en over kubisch vlakgecenterde kristalroosters. In beide gevallen betreft het een dichtste bolstapeling, waarbij $\phi = 0{,}7405$ (figuur 4).


figuur 3


figuur 4

De vraag is nu, in hoeverre meerdimensionale ruimten gevuld kunnen worden, met andere woorden hoe ϕ_{max} afhangt van n, het aantal dimensies. Vanaf dit punt laat ons voorstellingsvermogen ons in de steek: je kunt het je niet meer voorstellen, maar je kunt er wel aan rekenen!

De gemakkelijkst te berekenen ruimtevullingsgraad van cirkels, bollen en hyperbollen is gebaseerd op vierkanten, kubussen en hyperkubussen, hoewel daarmee vanzelfsprekend niet de dichtste pakking bereikt wordt. In het eerste deel van dit artikel zullen we kijken naar deze orthogonale stapelingen. Daarna komen de dichtst mogelijke stapelingen aan de beurt, die zich voordoen in zeshoeken, ruitendodekaeders, enzovoorts.

Orthogonale stapelingen

Zoals in de inleiding al genoemd, is de vullingsgraad ϕ gelijk aan $\pi/4 = 0{,}785$, als we in ieder vierkant van een rechthoekig assenstelsel een ingeschreven cirkel aanbrengen. Voor bollen in kubussen wordt dit: $\phi = \pi/6 = 0{,}524$. In een n-dimensionale ruimte R_n zijn de inhouden van achtcel en de hogere 'maatpolytopen' eenvoudig gelijk aan D^n, waarin D de lengte van de ribbe is. Voor de inhouden van de hypersfeer ($n = 4$) en van de hoger-dimensionale 'bollen' met straal R heeft Coxeter (ref. 1) de volgende formule afgeleid:

$$B_n = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma(n/2 + 1)}$$

of, zonder de gammafunctie:

n even:

$$B_n = \frac{\pi^{n/2} R^n}{(n/2)!}$$

n oneven:

$$B_n = \frac{2^n \pi^{(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}\right)! R^n}{n!}$$

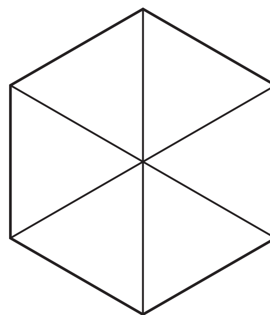
Met $R = 1/2$ vinden we voor B_n de volgende waarden, die tevens de vullingsgraden ϕ voorstellen, want met $D = 1$ zijn de inhouden van alle maatpolytopen $D^n = 1$:

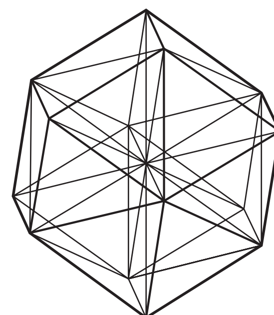
n	ϕ	n	ϕ	n	ϕ
2	0,785 398	7	0,036 912	12	0,000 326
3	0,523 599	8	0,015 854	13	0,000 111
4	0,308 425	9	0,006 442	14	0,000 037
5	0,164 49	10	0,002 49	15	0,000 012
6	0,080 74	11	0,000 920	16	0,000 004

We zien dat de vullingsgraden verrassend snel dalen met toenemend aantal dimensies: in een acht-dimensionale ruimte is nog slechts 1,6% gevuld, bij 13 dimensies nog slechts 0,1‰. Maar het betreft hier de nogal inefficiënte orthogonale stapeling; wellicht ligt de zaak anders bij de dichtst mogelijke pakkingen. Dat wordt bekeken in het vervolg van dit artikel.

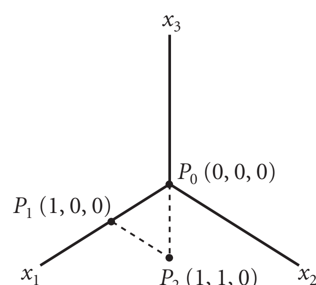
Dichtste stapelingen

Cirkels en bollen enzovoorts kunnen een ruimte het beste vullen als ze geplaatst worden binnen ruimtevullende veelhoeken, veelvlakken enzovoorts, in het algemeen ‘polytopen’ genoemd. Voor de meest efficiënte stapeling moeten we ruimtevullende polytopen nemen met het grootst mogelijk aantal zijden, die bovendien een aan alle zijden rakende bol kunnen bevatten. In het platte vlak R_2 zijn dat zeshoeken, in R_3 ruitentwaalfvlakken (rhombendodekaeders). Een ander ruimtevullend half-regelmatig veelvlak, de afgeknotte oktaeder, komt niet in aanmerking, hoewel het 14 zijden heeft, doch geen ingeschreven bol.
De zeshoek kan opgesplitst worden in zes (= 3!) kleinere ruimtevullers, driehoeken (figuur 5); het ruitentwaalfvlak in 24 (= 4!), eveneens ruimtevullende viervlakken (figuur 6). Deze tetraeders zijn uiteraard niet regelmatig, wèl gelijkzijdig. Ze zijn onder andere beschreven in ref. 2, 3 en 4. Van hun zes ribben zijn er twee lang met een standhoek van 90° en vier kort met een standhoek van 60°. De verhouding van lange en korte ribben bedraagt $\sqrt{4/3} = 1,155$. Het blijken de enige ruimtevullende gelijkzijdige en gelijkhoekige tetraeders te zijn (ref. 3); ze zijn uit een A4-vel papier (ref. 2) of een envelop (ref. 4) heel gemakkelijk te vouwen.


figuur 5


figuur 6

De vraag is nu, of deze wijze van ruimtevulling ook in hogere dimensies bestaat. Kan een *n*-dimensionale ruimte, *Rn*, gevuld worden met $(n + 1)$-zijdige cellen, waarvan er steeds $(n + 1)!$ een hoekpunt gemeen hebben en waarbij in de polytoop, gevormd door deze $(n + 1)!$ cellen, een bol past? Om dit te onderzoeken is het nuttig om een speciaal assenstelsel te kiezen, en wel met $n + 1$ assen die gelijke, doch scheve, hoeken met elkaar maken. Het aantal coördinaten is dus één meer dan het aantal dimensies. Het eenvoudigste voorbeeld is een drie-assig stelsel in het platte vlak (zie figuur 7).



figuur 7

We hoeven overigens maar twee van de drie coördinaten te gebruiken want de x_3-coördinaat kan eventueel nul blijven. De oorsprong *O* of P_0 is (0, 0, 0), het punt P_1 (1, 0, 0), het punt P_2 (1, 1, 0).
Maar P_1 en P_2 kunnen ook als respectievelijk (0, –1, –1) en (0, 0, –1) worden aangeduid. De coördinaten van de hoekpunten van de driehoek $P_0P_1P_2$ kunnen dus in de volgende matrix worden weergegeven:

	x_1	x_2	x_3
P_0	0	0	0
P_1	1	0	0
P_2	1	1	0

Door alle 3! = 6 permutaties van x_1, x_2 en x_3 achtereenvolgens boven de kolommen te zetten, krijgen we 6 stellen van 3 punten. Elk stel bevat de hoekpunten van één der ruimtevullende driehoeken rondom punt (0, 0, 0). Tezamen vormen ze de zeshoek met de zes hoekpunten rondom het centrum $O = (0, 0, 0)$. Hetzelfde geldt voor de viervlakken: hun coördinatenmatrix is als volgt:

	x_1	x_2	x_3	x_4
P_0	0	0	0	0
P_1	1	0	0	0
P_2	1	1	0	0
P_3	1	1	1	0

De 4! = 24 permutaties leveren de coördinaten van de 24 viervlakken die samen de ruimtevullende ruitendodekaeder van figuur 6 vormen. Hun assenstelsel kan men zich gemakkelijk voorstellen door uit te gaan van het platte vlak van figuur 7 met zijn drie halve assen die onderling een hoek van 120° (arccos −1/2) maken, loodrecht op dit vlak een vierde as omhoog op te richten, en de drie assen over een hoek van arcsin(1/3) naar beneden te draaien. De drie maken dan zowel onderling als met de vierde een hoek van arccos (–1/3).

Op deze wijze kunnen we doorgaan in n-dimensionale ruimtes. De hoeken tussen de $n + 1$ assen worden dan arccos(–1/n). De matrix van de hoekpunten van een der polytopen ziet er als volgt uit:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	……	x_n	x_{n+1}
P_0	0	0	0	0	0	……	0	0
P_1	1	0	0	0	0	……	0	0
P_2	1	1	0	0	0	……	0	0
……								
P_n	1	1	1	1	1	……	1	0

en de $(n + 1)!$ permutaties leveren alle ruimtevullende $(n + 1)$-cellen die rondom de oorsprong gerangschikt zijn. Omdat ze alle congruent zijn, heeft de polytoop die uit deze $(n + 1)!$ cellen samengesteld is, een ingeschreven bol met een straal R die gelijk is aan de afstand tussen de oorsprong en de verst verwijderde zijcel (een n-cel) van één der samenstellende $(n + 1)$-cellen: voor de in de matrix weergegeven cel betekent dat de cel met de hoekpunten $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Deze afstand moeten we dus berekenen. Maar ook de inhoud van de $(n + 1)$-cel, waarvan er immers $(n + 1)!$ passen in de ruimtevullende polytoop die de bol omringt.

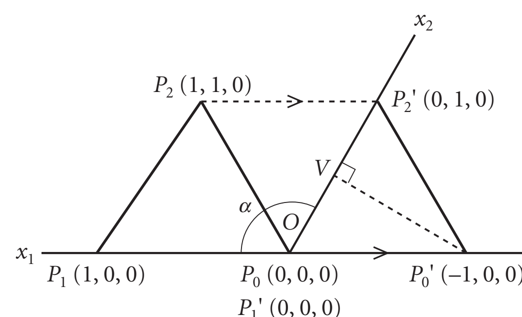
Berekening

Om de berekeningen uit te kunnen voeren, moeten de coördinaten x_i in de scheefhoekige n-dimensionale ruimte worden omgezet in die van een rechthoekig assenstelsel X_i. Dit vereist veel en vervelend rekenwerk. De resultaten kunnen we allereerst gebruiken om een formule af te leiden voor de afstand tussen twee punten $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ en $(x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}')$. Deze formule ziet er als volgt uit:

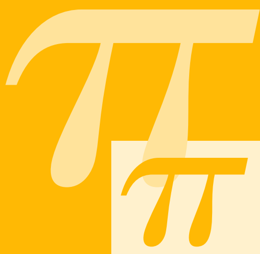
$$\sqrt{\frac{n+1}{n}\sum_{1}^{n+1}(x_i - x_i')^2 - \frac{1}{n}\left\{\sum_{1}^{n+1}(x_i - x_i')\right\}^2}$$

We moeten nu de inhoud van een $(n + 1)$-cel berekenen. Hiervoor gaan we eerst terug naar de driehoek $P_0P_1P_2$ in R_2, zoals afgebeeld in figuur 7.

Om de hoogte van deze driecel te bepalen, is het nuttig om hem te verschuiven over een afstand –1 in de x_1-richting, zodat P_1 als P_1' in de oorsprong terecht komt (zie figuur 8). De te berekenen afstand wordt dan de afstand tussen het verschoven punt P_0' (–1, 0, 0) en de verschoven eendimensionale ruimte R_1. De inhoud van de tweecel I_2 (lijnstuk $P_1'\ P_2'$) is 1. De hoogte van de driecel is $h_3 = P_0'V$, waarin V het voetpunt van de loodlijn uit P_1' op de eendimensionale ruimte $P_1'P_2'$ is. De afstand P_0V is $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = 1/n$ (in dit geval 1/2 en de coördinaten van V zijn dus: (0,1/n, 0).



figuur 8



π als kettingbreuk

Een kettingbreuk is een getal in de vorm

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

waarbij de a_i, de partiële noemers, geheel zijn.
Ieder rationaal getal kunnen we schrijven als een kettingbreuk. Zo is bijvoorbeeld

$$2\frac{9}{31} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

De getallen 2, $2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$, $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = 2\frac{2}{7}$ en

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 2\frac{9}{31}$$

heten respectievelijk de nulde, eerste, tweede en derde convergent van de kettingbreuk. Ieder irrationaal getal kan geschreven worden als een oneindige kettingbreuk. De convergenten van de oneindige kettingbreuk geven dan een rationale benadering van het irrationale getal.
Het ontwikkelen van een positief getal x_0 in een kettingbreuk is eenvoudig. De partiele noemers a_0, a_1, a_2, … berekenen we als volgt:

$$a_0 = [x_0],\ a_1 = [x_1],\ a_2 = [x_2], \ldots$$

waarbij

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - [x_0]},\ x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]},\ x_3 = \frac{1}{x_2 - [x_2]}, \ldots$$

Hierin is $[x]$ het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan x.
Met het bovenstaande algoritme kunnen we π schrijven als oneindige kettingbreuk. De convergenten van die kettingbreuk leveren dan rationale benaderingen voor π op.

$$x_0 = \pi = 3 + (\pi - 3) \qquad a_0 = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - [x_0]} = \frac{1}{0{,}1415926\ldots} = 7{,}06\ldots \qquad a_1 = 7$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]} = \frac{1}{0{,}0625133\ldots} = 15{,}99\ldots \qquad a_2 = 15$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - [x_2]} = \frac{1}{0{,}9965944\ldots} = 1{,}00\ldots \qquad a_3 = 1$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - [x_3]} = \frac{1}{0{,}0034172\ldots} = 292{,}63\ldots \qquad a_4 = 292$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

De kettingbreuk voor π begint dus met

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

De eerste vijf convergenten zijn

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}.$$

Deze rationale benaderingen hebben de fraaie eigenschap dat ze de beste zijn. Dat wil zeggen $\frac{22}{7}$ is de beste rationale benadering met een noemer kleiner dan 106, $\frac{333}{106}$ is de beste met een noemer kleiner dan 33102 enzovoorts.
Onder de convergenten vinden we een aantal bekende benaderingen terug. Zo is $\frac{22}{7}$ de benadering van Archimedes en komt $\frac{355}{113}$ voor in de geschriften van Tsu Chung-chih (430-501) en de Nederlandse wiskundige en burgemeester van Alkmaar Adriaan Anthoniszoon (1527-1607).

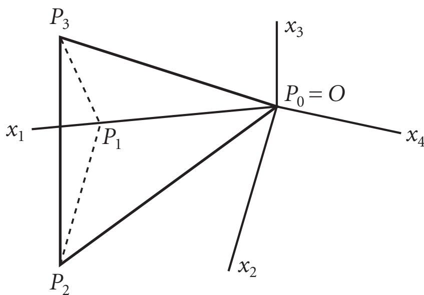
Rob Bosch

Literatuur

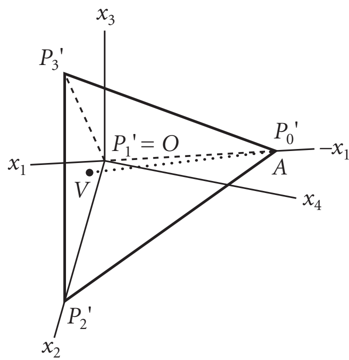
Boyer **A history of Mathematics**
Beckman **A history of π**
Rosen **Elementary number theory and its applications**

Voor het viervlak $P_0P_1P_2P_3$ in R_3 (zie figuur 9) worden de hoekpunten verschoven naar P_0', P_1' ($= P_0$), P_2' en P_3' (figuur 10). Hun coördinaten zijn:

	x_1	x_2	x_3	x_4
P_0'	–1	0	0	0
P_1'	0	0	0	0
P_2'	0	1	0	0
P_3'	0	1	1	0



figuur 9



figuur 10

Om de afstand van het punt $A = P_0'$ $(-1, 0, 0, 0)$ (dat ligt op de $-x_1$-as) tot de tweedimensionale ruimte, gevormd door P_1', P_2', P_3' te berekenen, projecteren we A op de door x_2 en x_3 gevormde ruimte (hier dus een vlak). De projectie is V (zie figuur 10). V bevindt zich op de symmetrie-as van de x_2-as en x_3-as (de bissectrice) en kan dus worden voorgesteld als $(0, v, v, 0)$.

Om v te bepalen kunnen we de bekende regel gebruiken dat het scalair (inwendig) product van de twee vectoren AV en OV, die een hoek β met elkaar maken, zowel gelijk is aan:
lengte AV * lengte OV * $\cos\beta$ als aan:
$X_1X_1' + X_2X_2' + X_3X_3' + \ldots$
waarin X_i en X_i' de orthogonale coördinaten zijn van de beide vectoren (de verschillen tussen hun eindpunten). We stellen dus, om de positie van het voetpunt V te berekenen, de eis dat dit scalair product nul is. Met behulp van de transformaties naar een orthogonaal assenstelsel vinden we: $v = 1/(n-1)$.
Dezelfde procedure kan toegepast worden voor vijfcellen, zescellen etcetera, waarbij blijkt dat respectievelijk $v = 1/(n-2)$, $v = 1/(n-3)$ enzovoorts.
De coördinaten van de voetpunten der loodlijnen zien er dus als volgt uit:

voor driehoeken:
$(0, 1/n, 0, 0, 0, 0, \ldots)$
voor viervlakken:
$(0, 1/(n-1), 1/(n-1), 0, 0, 0, \ldots)$
voor vijfcellen:
$(0, 1/(n-2), 1/(n-2), 1/(n-2), 0, 0, \ldots)$
voor i-cellen:
$(0, 1/(n-i+3), 1/(n-i+3), 1/(n-i+3), \ldots,$
$1/(n-i+3), \ldots, 0, 0, 0\ldots)$.

Dit betekent bijvoorbeeld dat voor een gelijkzijdige driehoek in het platte vlak ($n = 2$), zoals afgebeeld in figuur 7 en 8, het voetpunt V wordt weergegeven door $(0, \frac{1}{2}, 0)$. Voor het viervlak in R_3 van figuur 10 ($n = 3$) geldt voor het voetpunt V van de loodlijn vanuit A: $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Het is nuttig om dit te weten, want we willen immers straks de inhoud van het viervlak $P_0'P_1'P_2'P_3'$ berekenen. De lengte van de loodlijn AV levert ons de hoogte van dit viervlak, maar hoe groot is de basis, dat wil zeggen hoe groot is de oppervlakte van de driehoek $P_1'P_2'P_3'$? Ook hierbij hebben we een 'basis' en een 'hoogte'. De basis is bijvoorbeeld $P_1'P_2'$, en die heeft een lengte 1; de hoogte is de afstand van P_3' tot deze basis; dat is de lengte van de loodlijn vanuit P_3' op $P_1'P_2'$ in de driehoek $P_1'P_2'P_3'$. Het voetpunt van deze loodlijn heeft de coördinaten $(0, \frac{1}{3}, 0)$; deze driehoek is niet meer gelijkzijdig!

We kunnen nu verder gaan met onze pogingen om de inhoud van een $(n+1)$-cel in R_n te berekenen. We kijken naar een i-cel in R_n. Het kwadraat van de afstand van de voetpunten tot de 'top' $(-1, 0, 0, 0, \ldots)$ bedraagt, omdat het aantal termen $i - 2$ is, volgens de afstandsformule:

$[(n+1)/n]\ [1 + (i-2)/(n-i+3)^2] - (1/n)$
$[1 + (i-2)/(n-i+3)]^2 =$
$(n+1)(n-i+2)\ /\ n(n-i+3)$.

Dit is het kwadraat van de 'hoogte' van de i-cel, h_i^2.
Zijn inhoud I_i is gelijk aan $(1/(i-1))$ * I_{i-1} * h_i (immers de inhoud van een driehoek is $\frac{1}{2}$ * basis * hoogte, van een viervlak $\frac{1}{3}$ * grondvlak * hoogte, enzovoorts). We zoeken naar de inhoud van de $(n+1)$-cel,

omdat die in R_n de bouwsteen van de ruimtevullende polytoop is. Steeds een stap teruggaande, vinden we voor de inhoud van deze $(n+1)$-cel I_{n+1}:

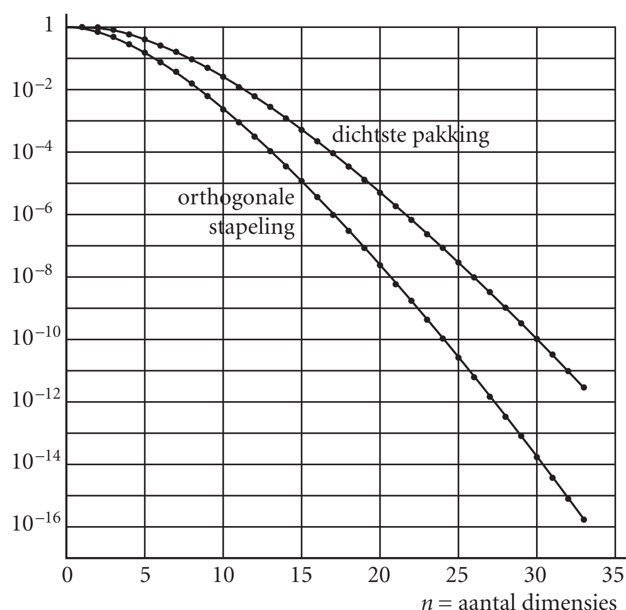
$$In_{+1} = (1/n)\cdot((1/(n-1))\cdot((1/(n-2))\ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot hn_{+1}\cdot hn\cdot\ \ldots\ldots\ h_3 =$$
$$= (1/n!)\prod_{i=3}^{n+1}[(n+1)(n-i+2)/n(n-i+3)]^{\frac{1}{2}}$$

(dus $(n-1)$ factoren)

$$= (1/n!)[(n+1)n]^{(n-1)/2}\cdot\prod_{i=3}^{n+1}[(n-i+2)/(n-i+3)]^{\frac{1}{2}}$$

De totale inhoud van de ruimtevullende polytoop P_n in R_n is $(n+1)!$ maal zo groot, dus:

$$P_n = \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n^{(n-1)/2}}\prod_{i=3}^{n+1}\left[\frac{n-i+2}{n-i+3}\right]^{\frac{1}{2}}$$



figuur 11

Resultaten

Samen met de in het eerste deel van dit artikel gegeven formules voor de inhoud van de bol in R_n (B_n) kan dus nu de vullingsgraad ϕ_n berekend worden. De straal van de ingeschreven bol in de polytoop is gelijk aan de 'hoogte' van de $(n+1)$-cel, zoals in het voorgaande bepaald.

De tabel geeft enkele waarden voor ϕ_n, terwijl in figuur 11 ϕ_n als functie van n is uitgezet, zowel voor het eerste geval van de kubusstapeling als voor de zojuist berekende dichtste pakking.
Inderdaad blijkt de dichtste stapeling aanzienlijk efficiënter te zijn dan de eenvoudige orthogonale; bij $n = 32$ zelfs een factor 10.000 beter!
Toch is ook hierbij de daling van ϕ met toenemende n dramatisch.
Een zó geringe vullingsgraad doet denken aan de ijlheid binnen een sterrenstelsel, of ook binnen een atoom!

n	ϕ	n	ϕ	n	ϕ
2	0,906 900	7	0,147 649	12	0,005 786
3	0,740 480	8	0,084 557	13	0,002 889
4	0,551 728	9	0,046 098	14	0,001 209
5	0,379 881	10	0,024 028	15	0,000 527
6	0,244 151	11	0,012 018	16	0,000 223

Verantwoording (van A.K. v.d. V.)

Dit artikel is geschreven als bewerking van de nagelaten aantekeningen van mijn goede vriend en collega-veelvlakken-liefhebber Ir. H.C. van den Berg, die helaas op 2 maart 1997 op 67-jarige leeftijd plotseling overleed, voordat hij zijn concept gestalte kon geven. In dankbare herinnering aan hem wil ik dit artikel opdragen aan onze gemeenschappelijke kleindochter Isabelle. Ten slotte dank aan Mw. Drs. A. Verweij voor het kritisch lezen van het manuscript en voor een nuttige suggestie betreffende de berekeningen.

Referenties

1 *H.S.M. Coxeter*
Regular Polytopes
Dover Publications Inc., 1973
pag. 125

2 *H.C. van den Berg*
Normalisatie en economie bij de bijen
Normalisatie Magazine, december 1991

3 *A.K. van der Vegt*
Regelmaat in de Ruimte
Delftse Universitaire Pers, 1991
pag. 57

4 *J. Smit en L. van den Broek*
Envelop met inhoud
Euclides, 72/5
pag. 193

Examens in de Tweede Fase

Kees Hoogland

Inleiding

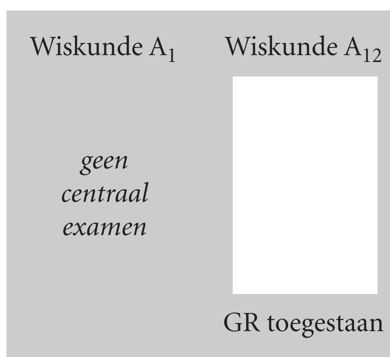
De CEVO heeft inmiddels bekend gemaakt hoe de centrale examens wiskunde voor de Tweede Fase er ongeveer uit gaan zien. Dat zal straks eerst aan de orde komen. Doordat scholen mogen kiezen om in 1998 of 1999 te starten is er sprake van een overgangsjaar.
In 2000 zal er voor het havo zowel volgens het oude programma als voor de nieuwe programma's worden geëxamineerd. Hetzelfde geldt voor vwo in 2001. Over de overlap in de oude en nieuwe examens zal het tweede gedeelte van dit stukje gaan.

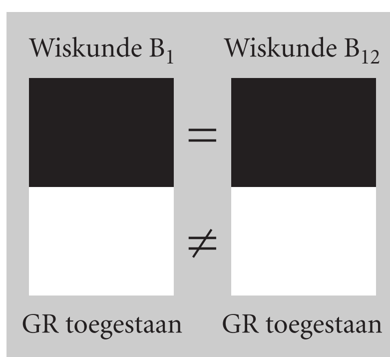
Examens

Er zullen in de toekomst niet voor elk profiel geheel verschillende examens komen.
De examens Wiskunde A_1 en Wiskunde A_{12} zullen voor ongeveer de helft overlappen. Dat geldt net zo voor de examens Wiskunde B_1 en Wiskunde B_{12}.
Bij alle nieuwe examens zal de grafische rekenmachine (GR) zijn toegestaan.

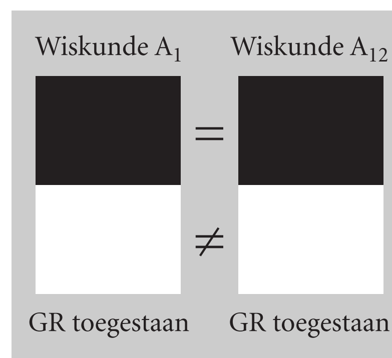
In schema ziet dat er zo uit:

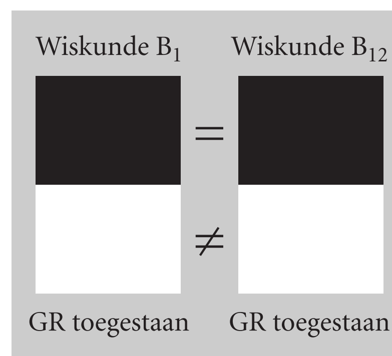
havo *nieuwe programma*





vwo *nieuwe programma*



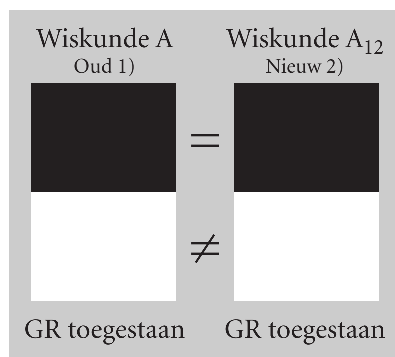


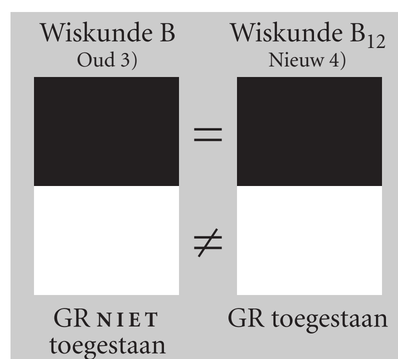
Overgangsjaar

Zoals eerder opgemerkt is er voor zowel havo (2000) als vwo (2001) een overgangsjaar, waarin het oude programma en het nieuwe programma geëxamineerd wordt.
De oude en de nieuwe leerplannen hebben een flinke overlap. In het overgangsjaar zal het examen wiskunde A (oud) een overlap van ca. 50% vertonen met het examen Wiskunde A_{12} (nieuw).
Voor de havo zal het examen wiskunde B (oud) voor ca. 50% een overlap vertonen met het examen Wiskunde B_{12} (nieuw).
Het vwo examen wiskunde B_{12} (nieuw) zal echter geheel verschillend zijn van het vwo-examen wiskunde B (oud). Hier is het leerplan namelijk het sterkst gewijzigd.
Bij de examens wiskunde A (oud) zal in het overgangsjaar de GR wel een toegestaan hulpmiddel zijn. Bij wiskunde B (oud) nog niet.

In schema ziet dat er zo uit:

havo 2000 ***overgangsjaar***





Er zal dus steeds een flinke overlap zitten in de examens oude programma en de examens nieuwe programma.
Inhoudelijk is het globaal:

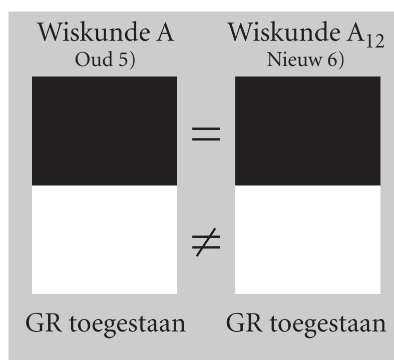
1 alleen Wiskunde A (oud)
- Grafen en Matrices
- Binaire codes

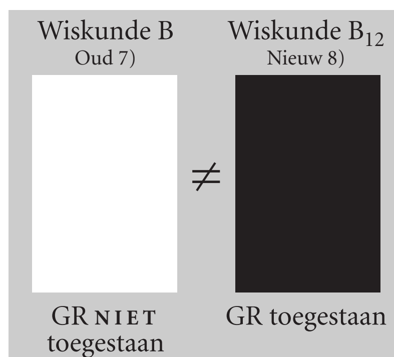
2 alleen Wiskunde A_{12} (nieuw)
- differentiëren
- toepassingen bij differentiëren
- binomiale verdeling

3 alleen Wiskunde B (oud)
- allerlei gebroken functies en de quotiëntregel (de standaardfunctie $f(x) = 1/x$ zit wel in het nieuwe programma.)
- tangensfunctie
- tweede afgeleide, buigpunt
- het algebraïsch oplossen van allerlei typen vergelijkingen
- bewegingen en spiegelingen in de ruimte
- projectiemethoden

4 alleen Wiskunde B_{12} (nieuw) (de ijskast ontdooit!)
- eigenschappen, inhoud, oppervlakte van cilinder, kegel, bol
- parallelle doorsneden, hoogtekaarten
- uitslagen tekenen en interpreteren

vwo 2001 ***overgangsjaar***





5 alleen Wiskunde A (oud)
- periodieke functies (gaat verder dan in nieuw)
- buigpunt/symmetrie functie
- functies van twee variabelen
- formule bij lijn op log-papier
- getal e en ln x (ln a wel in nieuw bij differentiëren $y = a^x$)
- hypergeometrische kansverdeling

6 alleen Wiskunde A_{12} (nieuw)
- staafdiagram, boxplot, steel- en bladdiagram
- kwartiel, kwartielafstand, spreidingsbreedte
- discrete analyse: rijen, recursie
- discrete dynamische modellen

7, 8 Voor Wiskunde B_{12} nieuw zal echt een heel ander examen zijn dan voor Wiskunde B oud. Zie bijvoorbeeld het examenprogramma in Euclides 73-2 en de toevoeging in Euclides 73-3.

Verder moet natuurlijk wel bedacht worden dat de specifieke eigen helft van de examens niet alleen hoeft te gaan over wat er hierboven bij de noten **1** tot en met **6** is genoemd.

Tot zover dit keer maar weer de informatie over de Tweede fase.

Extra ledenvergadering NVvW

Op *woensdag 10 juni a.s.* wordt er in Utrecht een buitengewone algemene ledenvergadering gehouden.

Agendapunt is: **Een nieuwe bestuursstructuur voor de NVvW**
(Zie de gelijknamige notitie in het midden van dit nummer van Euclides.)

In deze notitie stelt het bestuur voor om:
- de bestuursvorm van de NVvW te reorganiseren in een Algemeen Bestuur (AB) en een Dagelijks Bestuur (DB)
- de leden van het DB een gedeeltelijke vergoeding te geven voor hun werkzaamheden
- een aantal activiteiten onder te brengen in werkgroepen.

Het bestuur

Bewijs-opgaven in 4 vwo

Jan Schrik

Inleiding

Sinds anderhalf jaar doet het Christelijk Lyceum Delft mee aan een netwerk in samenwerking met de TU Delft. Collega's die les geven in de vakken wiskunde, natuurkunde en scheikunde doen in dit netwerk mee. Wij proberen ons zo voor te bereiden op de komende tweede fase. Onderwerpen die aan de orde zijn geweest of nog aan de orde komen zijn onder andere: studievaardigheden en (profiel-) werkstukken.
In de subgroep wiskunde is het streven de huidige 4-vwo leerlingen in dit voorjaar een werkstukje (praktische opdracht) te laten maken. Niet alleen voor leerlingen maar ook voor ons als docent leerzaam. Vooruitlopend op hetgeen afgesproken is, heb ik de leerlingen van mijn 4-vwo klas een werkstuk in de les laten maken. Mijn inspiratiebron was: bewijzen in de meetkunde. De opgaven zijn op de volgende bladzijden als werkbladen afgedrukt.

Werkwijze

De opgaven zijn gemaakt nadat hoofdstuk 4 uit Getal en Ruimte deel 4V1 was behandeld en vroegen meer van de leerlingen dan de bewijsopgaven in het boek. In een van de laatste lessen die besteed is aan hoofdstuk 4 heb ik een voorbeeld (dit voorbeeld leek op opgave 1) behandeld waarbij ik de leerlingen heb laten zien wat van hen gevraagd zou worden.
Op het stencil met de opgaven was aangegeven dat de stelling van Pythagoras en gelijkvormigheid gebruik moesten worden.
De leerlingen hebben de opgaven in 3 lesuren mogen maken in door hen zelf gemaakte groepjes van vier. Binnen een groep kon het werk verdeeld worden; per groepje moest één serie uitwerkingen ingeleverd worden. Het was niet nodig er een mooi verslag van te maken. De antwoorden op de opgaven moesten wel netjes op aparte vellen geschreven worden. De werkstukken zouden uiteindelijk beoordeeld worden met een cijfer dat voor het rapport even zwaar zou wegen als een proefwerkcijfer. De leerlingen konden aanwijzingen 'kopen' als ze vast liepen. Dit hield in dat dan voor de betreffende opgave minder punten werd toegekend.

Ervaringen

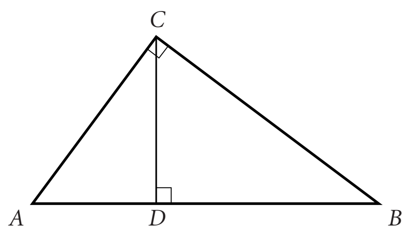
Toen ik de indeling van de groepen kreeg, zag ik dat in één groep 3 zwakke leerlingen zaten. Mijn gedachten over de te verwachten prestaties van deze groep waren niet zo positief, maar al snel moest ik mijn mening herzien. In dit groepje werd een goede taakverdeling gemaakt en er werd met grote inzet aan de opdrachten gewerkt. Ook werd op tijd een aanwijzing gevraagd. Tenslotte leverde deze groep het beste eindresultaat.
De eerste twee lessen werd er door de andere groepen nauwelijks gebruik gemaakt van de mogelijkheid om aanwijzingen te kopen.
Enkele opgaven (1, 3, 4 en 5) kwamen de leerlingen wel bekend voor en ik had verwacht dat deze opgaven in elk geval vrij snel gemaakt zouden worden. Maar dit viel tegen. Het werken met letters en formules blijft voor veel leerlingen moeilijk. Toch vonden ze het een uitdaging de opgaven zelf te maken. De meesten bleven dit lang proberen, wat ik erg positief vond. De derde en laatste les werd veel meer om aanwijzingen gevraagd. Het ging uiteindelijk toch om een cijfer.
Toen uiteindelijk de balans werd opgemaakt, vond ik alleen het eindresultaat van de eerste groep echt voldoende. Van de andere vijf groepen waren er vier gelijkwaardig en was de vijfde groep net iets beter dan deze vier. Toch heb ik alle 24 leerlingen een 6- of hoger gegeven. Hun inzet was immers groot geweest, de manier van werken bij wiskunde onbekend en het niveau van de opgaven duidelijk hoger dan ze gewend waren.

De opgaven

Enkele opmerkingen bij de opgaven:
Opgave 1: Is bekend zodra er getallen staan in plaats van letters. Ik had hier toch iets meer van verwacht.
Opgave 2a: Er werd veel geprobeerd. Slechts één groep kwam er met een aanwijzing uit.
Opgave 2b: Omdat 2a niet lukte, was het resultaat minimaal.
Opgaven 3, 4, 5: Kwamen bekend voor, omdat het hoofdstuk uit het boek daar immers over ging.
Opgave 6: Met behulp van veel aanwijzingen werd door een paar groepen het bewijs gegeven.
Opgaven 7, 8: Verder dan de eigenschap dat een raaklijn loodrecht staat op de straal van de cirkel kwam men vaak niet.
Opgave 9: Volgde uit opgave 8.
Er werd maar niet aan begonnen.

Werkblad

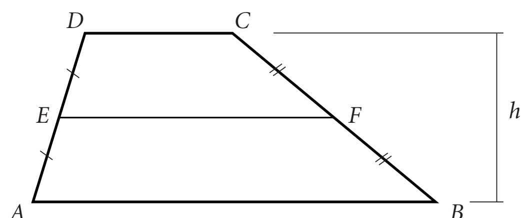
Bewijs-opgaven



1 Driehoek *ABC* is een rechthoekige driehoek. *CD* is de hoogtelijn uit *C*. Bewijs nu de volgende stellingen:

a) $AC^2 = AD \cdot AB$

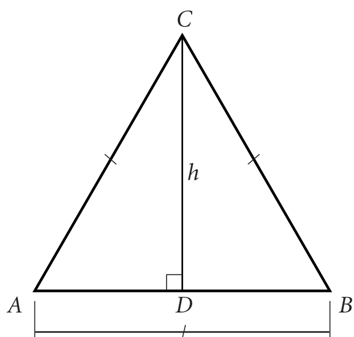
b) $CD^2 = AD \cdot DB$



2 Vierhoek *ABCD* is een trapezium.
Lijnstuk *EF* is evenwijdig aan lijnstuk *AB*. De punten *E* en *F* zijn middens van de zijden waar ze op liggen. De hoogte van het trapezium noemen we *h*.
Bewijs nu de volgende stellingen:

a) $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

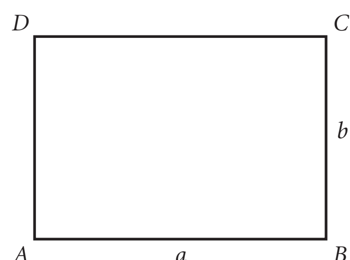
b) Oppervlakte van het trapezium = $EF \cdot h$



3 Driehoek *ABC* is een gelijkzijdige driehoek.
De straal van de omgeschreven cirkel noemen we *R* en de straal van de ingeschreven cirkel noemen we *r*.
Bewijs nu de volgende stellingen:

a) $R = \frac{2}{3} \cdot h$

b) $r = \frac{1}{3} \cdot h$

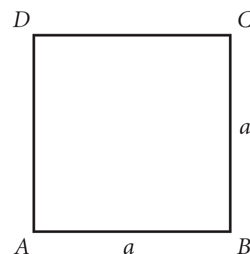


4 Vierhoek *ABCD* is een rechthoek.
Druk de straal *R* van de omgeschreven cirkel uit in *a* en *b*.

Werkblad

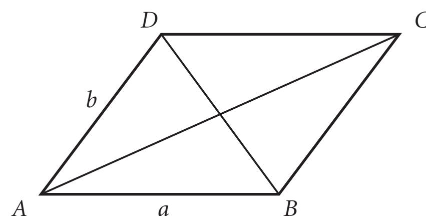
5 Vierhoek $ABCD$ is een vierkant.

a) Druk de straal R van de omgeschreven cirkel uit in a.
b) Druk de straal r van de ingeschreven cirkel uit in a.

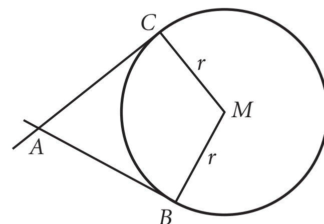


6 Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram.

Bewijs nu de volgende stelling: $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$
(Aanwijzing: Teken de lijn CE loodrecht op AB en teken de lijn BG loodrecht op CD.)



7 De lijnen AC en AB zijn raaklijnen aan een cirkel met middelpunt M. Schrijf op welke eigenschap je weet van een raaklijn aan een cirkel en leg uit waarom geldt: $AC = AB$

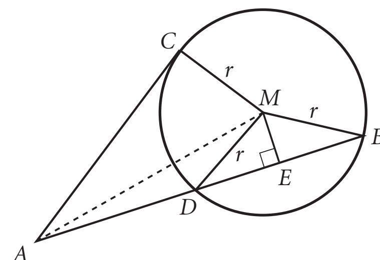


8 De lijn door A en C is een raaklijn aan een cirkel met middelpunt M en straal r. Door punt A wordt een willekeurige lijn getekend die de cirkel snijdt in de punten D en B.
In de getekende figuur zijn nog enkele belangrijke lijnstukken getekend.
Bewijs nu de volgende hulpstellingen:

a) $AC^2 = AE^2 + EM^2 - r^2$

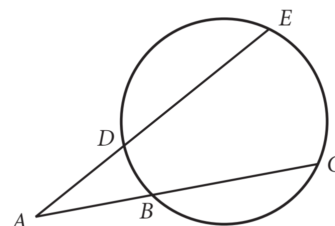
b) $AC^2 = AE^2 - EB^2$

Bewijs nu ten slotte de stelling: $AC^2 = AD \cdot AB$



Opdracht 9 kun je alleen maken als je opdracht 8 hebt gemaakt.

9 Punt A is een punt buiten de cirkel.
Door A zijn twee lijnen getekend die de cirkel snijden in de punten B, C, D en E.
Bedenk nu met behulp van opdracht 8 een eigenschap die in deze figuur geldt.



De opgaven van deze werkbladen horen bij het artikel *Bewijs-opgaven in 4 vwo* op blz. 191.

De computer in de wiskundeles *

Peter van Wijk

In dit artikel komen aan de orde:
- computergebruik in de wiskundeles in historisch perspectief;
- de ontwikkeling van het computergebruik in de wiskundeles op SG de Klop in Utrecht;
- een blik in de toekomst met aandacht voor informatie- en communicatietechnologie (ICT).

Inleiding

Regelmatig kun je in kranten en tijdschriften een kop aantreffen als hieronder.

Computers beheersen onderwijs

Wie in de praktijk werkt, weet dat dit zeker nog niet het geval is.
Dat het computergebruik in de toekomst zal toenemen staat wel vast. Maar op dit moment is de stand van zaken op scholen nog heel verschillend.
Een goed moment om eens stil te staan bij wat er op het ogenblik voorhanden is wat betreft het computergebruik in de wiskundeles.
Belangrijk daarbij is dat de ervaring ons geleerd heeft dat een stapsgewijze ontwikkeling van het computergebruik binnen een wiskundesectie de meeste kans van slagen geeft bij het ook echt gebruiken van de computer in de les.
Ook zijn goede randvoorwaarden, zoals goede software en goed beheer, heel belangrijke factoren bij computergebruik.
Op korte termijn zal het aantal computers binnen de school ongetwijfeld snel toenemen. Het is hoog tijd om goed na te denken over de integratie van de computer binnen de school.

Nog niet zo lang geleden

Tot 1991 was het moeizaam werken met schijfjes het belangrijkste kenmerk van computergebruik.
Eindeloze stapels diskettes werden gekopieerd of, en dat was al modern, geïnstalleerd op de harde schijf van de verschillende computers.
De programma's waren zeer uiteenlopend van aard en kwaliteit.
Sommige programma's waren zeer gesloten. Leerlingen werden stap voor stap door het programma geleid en hadden vaak weinig invloed op het verloop van het programma.
Soms natuurlijk wel, als bijvoorbeeld het programma voorschreef Enter in te toetsen en de leerlingen dat probeerden op te volgen door E N T E R te typen.
Er waren nog geen standaarden en er werden weinig eisen aan de programma's gesteld. Belangrijke problemen waren tevens het gebrek aan geld en het ontbreken van netwerkbeheer.
Meestal werd de ontwikkeling slechts in gang gezet door een fanatiekeling in de sectie. Er was ook nog geen goed beeld wat de meerwaarde was van het werken met de computer.
Een aantal programma's waren al wel populair in die tijd:
- Schatten
- Grafiekentaal
- VU-grafiek
- Eigenwijs

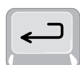
1991 - 1996

De periode 1991-1996 wordt gekenmerkt door computernetwerken. Benodigde software kan vaak centraal geïnstalleerd worden en is dan op alle netwerkcomputers te gebruiken.
Het gedoe met de schijfjes is inmiddels grotendeels achterhaald. Hierdoor wordt de noodzaak van een goede netwerkbeheerder natuurlijk een nog belangrijker factor voor het welslagen van het gebruik in de les.
De beschikbare programma's worden steeds meer open programma's: de leerling kan ze gebruiken als hulpmiddel om opgaven of problemen op te lossen.
Inmiddels verschijnen ook in verschillende boeken werkbladen voor computergebruik. Het aantal mensen dat programma's uitprobeert neemt ook toe binnen secties en scholen.
Geld is er inmiddels ook wel, maar nu is er vaak geen tijd door alle andere veranderingen in het onderwijs.
De volgende programma's komen naar voren:

- *Hoeken*, een gesloten programma om hoeken te schatten. Het programmaatje is erg populair bij leerlingen.
- *Wageningse methode*, specifieke software rond allerlei wiskundige onderwerpen, met een goede didactische achtergrond.

Verder zijn er inmiddels een aantal, open programma's. Je kunt ze werkomgevingen noemen:

- *VU-statistiek*
- *VU-grafiek basisvorming*
- *Alcor*
- *Ruimfig*, *Doorzien* en een aantal andere ruimtemeetkunde-programma's.

Sommige leerlingen moeten nog steeds naar de Enter-toets zoeken, die op de meeste toetsenborden vervangen is door 

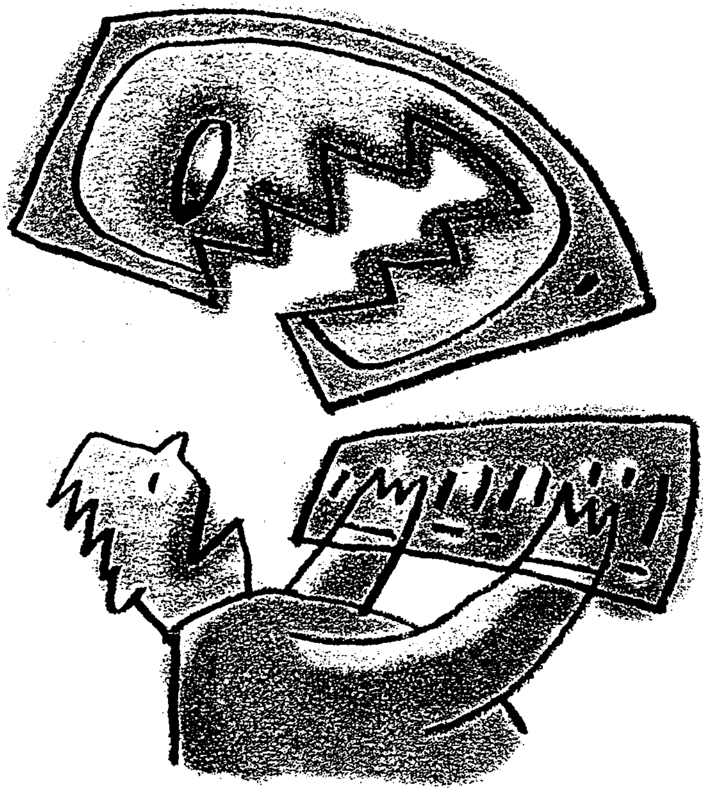
40 jaar geleden

IN MEMORIAM J.H. SCHOGT

Op 8 februari jl. overleed op 65-jarige leeftijd collega J.H. Schogt. Een markante persoonlijkheid, die van grote betekenis is geweest voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs in ons land, is hiermee heengegaan. Als lid van de redactie van Euclides denk ik hierbij in de eerste plaats aan het vele werk, dat hij voor ons tijdschrift gedaan heeft. Vanaf de oprichting is hij gedurende een periode van bijna 25 jaar redacteur geweest. Verscheidene publikaties zijn van zijn hand in Euclides verschenen; met name op het gebied van de zuivering van de wiskundige vaktaal. Daarnaast was hij van 1925 tot 1929 secretaris van Wimecos. Zowel de redactie van Euclides als het bestuur van Wimecos denken met grote waardering terug aan de nauwgezette wijze, waarop Schogt zijn taak vervuld heeft.
Hij was op didactisch gebied bezield met het ideaal zoveel als mogelijk was wiskundige strengheid in het onderwijs door te voeren. Zelf heb ik mijn eerste wiskunde-onderwijs in de jaren 1921-23 van Schogt mogen hebben en ik gedenk deze lessen nog steeds met dankbaarheid. Degenen, die daar ontvankelijk voor waren, konden van hem leren, hoe men zijn gedachten logisch op kan bouwen en hoe men ze zuiver onder woorden dient te brengen. Zijn didactische idealen vonden hun neerslag in een viertal boeken. In 1929 verschenen zijn Beginselen der Vlakke Meetkunde en Oefeningen in de Vlakke Meetkunde en in 1926 en '27 zijn Beginselen der Theoretische Mechanica I en II. Deze boeken zijn met de uiterste zorg en met grote bekwaamheid geschreven. Menig wiskundeleraar zal er met genoegen kennis van hebben genomen en ze een afzonderlijke plaats in zijn boekenkast gegeven hebben. Helaas heeft de auteur er weinig vreugde van beleefd. Bij zijn pogen de idealen, die hij zich gesteld had, te verwerkelijken, bleek hij te hoog gegrepen te hebben. Hoe waardevol zijn boeken waren, voor de leerling bleken zij te moeilijk. In deze ene zin weerspiegelt zich de tragiek van Schogts loopbaan. Aan de ene kant was hij met een dergelijke liefde voor zijn vak bezield, dat hij niet kon dulden, dat zich als wiskundeonderwijs aandiende, wat op deze naam slechts gebrekkig aanspraak kon maken. Aan de andere kant was hij daarin zo consequent, dat teleurstelling hem niet bespaard kon blijven. Zijn beslist positieve instelling, zijn correctheid en stiptheid mogen ons echter blijvend een voorbeeld zijn.

P.G.J. Vredenduin

Uit: Euclides 33 (1957-1958)



Vriendelijk? Vriendelijk? Een doosje lucifers is gebruiksvriendelijk, een computer absoluut niet

1996 - 1997

Het schooljaar 1996-1997 zorgt voor een omwenteling: de computer moet op vbo/mavo functioneel gebruikt worden bij het schoolonderzoek. Het gebruiken van de computer bij de wiskundeles is geen vrijblijvende keuze meer.
Er verschijnen boekjes met werkbladen zoals de PIT-werkbladen, lesvoorbeelden van de SLO en APS-boekjes. De docenten willen wel maar roosterproblemen met het computerlokaal, gebrek aan scholing en geen overzicht van bestaande programma's maken het een groot aantal scholen lastig om goed te starten. Ook wordt duidelijk dat pas in 4 vbo/mavo beginnen met computergebruik niet de meest effectieve manier is om leerlingen goed met de programma's te laten werken.

Veel scholen zitten op dit moment nog midden in het proces om de computer in de wiskundeles zinvol en hanteerbaar in te zetten.
Ik stap nu over naar hoe dat proces zich op SG de Klop de afgelopen tien jaar heeft voltrokken.

De Klop

De Klop in Utrecht is al 10 jaar met computergebruik bezig. De school en de wiskundesectie rolden er eigenlijk een beetje in doordat het Freudenthal instituut op school een paar projecten deed. Het was zeker niet zo dat de wiskundesectie bestond uit fanatieke computerwizards. In de loop der tijd zijn zeer goed geoutilleerde computerlokalen en zelfs een computer- annex studieruimte ontstaan.
Er is veel geïnvesteerd in beheer en het goed opzetten van het netwerk. Een veel gemaakte vergissing door sommige secties is om meteen alles wat er aan wiskundeprogramma's voorhanden is direct op het netwerk te zetten. Dat oogt indrukwekkend, maar is geen garantie dat die programma's ook gebruikt gaan worden.
De wiskundesectie op de Klop heeft dat anders gedaan. Er is besloten stap voor stap elk jaar weer een paar programma's toe te voegen. En dan alleen die programma's waarbij duidelijk gebruiksmogelijkheden zijn bij de boeken die in de klas worden gebruikt. Bovendien kan dan ieder sectielid ook stapsgewijs vertrouwd raken met de nieuwe programma's en ze ook echt gebruiken in de les.
Inmiddels staan er op het netwerk een twintigtal softwarepakketten voor wiskunde, die dan ook regelmatig gebruikt worden. De programma's zijn geïntegreerd in de vakplannen per leerjaar. Iedereen in de sectie is overtuigd en gebruikt regelmatig de computer.
Die integratie in de vakplannen staat in het overzicht hiernaast afgebeeld.

Andere computeractiviteiten

Doordat de sectie al lange tijd de computer gebruikt in de wiskundelessen, ontstaan er vanzelf ook initiatieven om de computer in te zetten bij andere onderdelen van de les.
Zo is er in mavo 4 en havo 5 een mondeling schoolonderzoek, waarbij gebruik gemaakt wordt van de computer. Hoe dat op 4 mavo in zijn werk gaat kunt u bijvoorbeeld lezen in de *Nieuwe Wiskrant* van oktober 1994: Algebra in 4 mavo, K. Hoogland/ P. van Wijk.
Het bijzondere van op deze wijze tentamineren is dat van leerlingen heel andere vaardigheden gevraagd worden. Zo wordt bijvoorbeeld bij

MODERNE WISKUNDE: MH-BRUGKLAS

Hoofdstuk 1: Tekenen	
• Introduktieles	Op stencil
• Hele hoofdstuk	Video: Wat, waar is wiskunde
• E- en G-opdrachten	
• Tekening maken	Telt als S.O.
• Computer	Eigenwijs 1A spiegelen
Hoofdstuk 2: Verhoudingen	
• Hele hoofdstuk	Video: Wat, waar is wiskunde
• E- en G-opdrachten	
• Computer	Wageningse methode
Hoofdstuk 3: Coördinaten	
• t/m opgave 28	Video: Wat, waar is wiskunde
• Géén E- en G-opdrachten	
• (Extra opdrachten)	Op stencil, alleen als het kan!
• Coördinatenwedstrijd	Deelname vrij, één prijs per klas
• Computer	Klasse-opstelling (coördinaten 1) als introduktie Macco
Hoofdstuk 4: Lichamen	
• Hele hoofdstuk	Video: Wat, waar is wiskunde
• E- en G-opdrachten	
• Lekropo-opdrachten	
• Computer	Getal en ruimte
Hoofdstuk 5: Grafieken	
• Hele hoofdstuk	Video: Wat, waar is wiskunde
• E-opdrachten	
• Opdracht G1 en G2	
• (Extra stencil: Fietsen)	Alleen als het kan!
• Computer	Grafiekentaal
Hoofdstuk 6: Negatieve getallen	
• Hele hoofdstuk	
• E- en P-opdrachten	
• Extra stencil: opgaven met 'meneer van Daalen'	
• Computer	De heks (vroeg !!!!) Eigenwijs
Hoofdstuk 7: Maten	
• Hele hoofdstuk	
• Alleen E-opdrachten	
• Extra stencil om te oefenen	
Hoofdstuk 8: Hoeken	
• Hele hoofdstuk	Schrappen in de eerste opgaven!!!!
•	Video: Wat, waar is wiskunde
• Alleen P-opdrachten	Geodriehoek
• Computer	Hoeken schatten Eigenwijs
Hoofdstuk 9: Formules	
• Hele hoofdstuk	Video: Wat, waar is wiskunde
• Alleen P-opdrachten	
Hoofdstuk 10: Rekenmachine	
• Hele hoofdstuk	
• P-opdrachten	
• Stencil extra opdrachten	
• Computer	Wageningse methode + OVERHORING

Extra buiten het boek:

1. Onderzoek met verslag
   - stencil met: histogram, beelddiagram en cirkeldiagram
   - stencil met: opdracht en indeling verslag
2. Stencil met rekenen (negatieve getallen, machten en formules)

Als er tijd over is:

3. Uit tweede klas: hoofdstuk 1 kijklijnen
   - Video: Wat, waar is wiskunde
4. Uit de derde klas: Grafen en matrices

een leerling met een ontzettend slordig schriftgebruik en daardoor ook vaak lage cijfers, duidelijk dat deze toch heel goed is in het interpreteren van grafieken en het verwoorden van wat er aan de hand is.
Verder gebruiken we in het vwo de computer bij het uitvoeren van een aantal praktische opdrachten in 4 vwo, ter voorbereiding van de Tweede Fase. In 5 vwo wordt de computer gebruikt bij de wiskunde-A-lympiade.

De toekomst

De komende jaren zullen veel secties de computer integreren in hun vakplannen en zal er (hoop ik) kritisch gekeken blijven worden naar de bruikbaarheid en de meerwaarde.
Ook in de toekomst blijven dezelfde zaken van belang: de software, de hardware en de inrichting van de school.
Wat de software betreft komen educatieve uitgeverijen op dit moment niet met heel veel nieuws op de proppen. Alleen oude programma's worden in een nieuw (Windows-)jasje gestoken. Een interessant perspectief biedt de software van allerlei bedrijven. Zo heeft de Rabobank een pakket 'cijfers & trends', een jaarlijkse uitgave met gegevens van allerlei bedrijfstakken.
Dat soort initiatieven zullen ook zeker toenemen in de toekomst.
Daarnaast zullen in de toekomst zeker ook nog opener werkomgevingen een rol gaan spelen. Daarbij moet men denken aan:

- *Maple*, *Derive* of *Mathematica*: dat zijn uitgebreide computeralgebra-pakketten, waarmee teksten verwerkt kunnen worden, grafieken getekend, maar waarmee ook algebraïsche bewerkingen kunnen worden uitgevoerd zoals differentiëren, primitiveren etcetera;

- *SPSS*: een uitgebreid statistiekpakket, dat op veel hogescholen en universiteiten een standaardpakket is;
- *Cabri*: een interactieve meetkunde-omgeving, waarmee ook bewijzen gevonden en geleverd kunnen worden.

In de toekomst zullen in het kader van bijvoorbeeld de praktische opdrachten zulke werkomgevingen steeds vaker gebruikt worden.
Verder heeft waarschijnlijk software voor remediërende doeleinden ook nog wel een toekomst, bijvoorbeeld om individuele leerlingen op een bepaald onderwerp bij te spijkeren.

Hardware en schoolinrichting

Vanuit de overheid hoor je toch voornamelijk kreten rondom de hardware: '1 computer per 10 leerlingen'.
Als je inmiddels vanuit de praktijk weet wat er allemaal bij komt kijken om computergebruik in de lessen goed te integreren, dan is dat wel een erg magere en eenzijdige invalshoek.
Naar mijn idee zullen scholen na 2000 nauwelijks nog grote computerlokalen hebben. Mogelijk wel voor informatica-onderwijs, maar niet voor de andere vakken.
Die lokalen blijven het nadeel houden dat ze gereserveerd moeten worden en dat je er met de hele klas tegelijk naar toe moet.
De toekomst is dat in elk lokaal en elke studiehoek één of enkele computers staan. De leerlingen gaan er mee aan het werk als ze zo'n werkomgeving nodig hebben, ze wisselen elkaar af en gaan eventueel thuis verder met de, bij de boeken geleverde, schijfjes.
Het netwerk, wat betreft kabels en beheer, zal in zo'n situatie natuurlijk goed ontwikkeld moeten zijn.

Startersproblemen

Bij de beginschreden op het pad van computer en ICT moet je aan een aantal zaken wennen:

- Het idee dat je achterloopt
Dat is per definitie zo in de computerwereld. Iedereen loopt achter. Het gaat erom minder achter te lopen dan het gemiddelde.

- De kretologie
In de wereld van ICT moet je wel wennen aan allerlei kreten.
Je bent nog maar net gewend aan formatten en booten of je moet alweer surfen en browsen. Je bent net gewend aan je fax-modem of je moet alweer aan de e-mail.
Belangrijk is in ieder geval je niet te laten imponeren door gebakken lucht. Kritisch kijken naar de bruikbaarheid in de lessen blijft het belangrijkste.
Waar kun je dan allemaal aan denken?
ICT in de toekomst betekent computer, grafische rekenmachine en Internet, ingezet bij:
- praktische opdrachten;
- profielwerkstuk;
- verrijkingsdeel vbo/mavo;
- schoolonderzoek;
- uitwisseling met andere scholen; en waarschijnlijk nog bij veel meer activiteiten.

Tot slot

Waar zit nu eigenlijk de meerwaarde van het gebruik van de computer in de wiskundeles?
De computer geeft vaak een prachtige visuele ondersteuning, belangrijk bij analyse en vooral ook bij meetkunde.
In een aantal gevallen geeft de computer goede feedback: er wordt direct gemeld dat iets niet goed is, bijvoorbeeld een verkeerd ingevoerde functie, of punten die niet in één vlak liggen. De computer is heel geduldig, je kunt eindeloos oefenen, individueel en in eigen tempo. Je kunt de computer goed inzetten bij het verrichten van een onderzoek, bijvoorbeeld voor het opslaan, ordenen en weergeven van grote hoeveelheden gegevens. Je kunt ook veel makkelijker dan op papier, werken met veel of met echt realistische gegevens.
Tot slot, je bent niet voor niets leraar, toch nog iets belerends: maak bij het inzetten van de computer in de lessen kleine stapjes, laat je niet gek maken en hoed je voor gebakken lucht.

Noot

* Dit artikel is een bewerking van de plenaire lezing die door Peter van Wijk gehouden is op de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, dd. 15 november 1997.

Literatuur

S. Kemme, K.J. Wieringa, en P. van Wijk
De computer in de wiskundeles
APS: 030 - 2856722

Werkbladen voor computergebruik bij basisvorming wiskunde
Freudenthal instituut
Fi: 030 - 2611611

PRINT/VO-reeks
- **PIT Algebra en statistiek**
- **PIT Meetkunde**
- **PIT geïntegreerde wiskundige activiteiten**

CPS: 033 - 2541206

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

Praktische opdrachten van 60% naar 40%

Mag het een onsje minder zijn?
U heeft in deze rubriek al een paar keer kunnen lezen over onze pogingen om onze zorgen met betrekking tot het gewicht van de praktische opdrachten over het voetlicht te brengen. Tot ons genoegen zijn we daarin wonderwel geslaagd. Het ministerie OC & W heeft onderkend dat hier een probleem lag, en besloten dat het gewicht van de praktische opdrachten gedurende de eerste drie examenjaren niet 60%, maar 40% van het schoolexamen zal zijn. Over het totaal gezien komt dat neer op 20% van het eindcijfer. Hiermee krijgen de praktische opdrachten een gewicht in de orde van grootte van een schoolonderzoek-oude stijl. We denken dat dit voor veel collega's een flinke zorg minder zal zijn. Het geeft aanmerkelijk meer ruimte om de komende jaren de praktische opdrachten rustig in de vingers te krijgen.

Inmiddels is er ook het nodige praktische werk verricht op dit terrein: deze zomer verschijnt bij het Cito een Handboek Praktische Opdrachten, met daarin tips, voorbeelden en een raamwerk voor beoordeling; het APS heeft al eens een bundel uitgebracht met praktische tips voor Praktische opdrachten en zal in het toekomstige aanbod daar ook veel aandacht aan schenken. Ook in de nieuwe wiskundemethodes zijn allerlei voorbeelden te vinden van mogelijke praktische opdrachten. Het ziet er dus voorlopig naar uit dat we er met vereende krachten wel uit zullen komen.

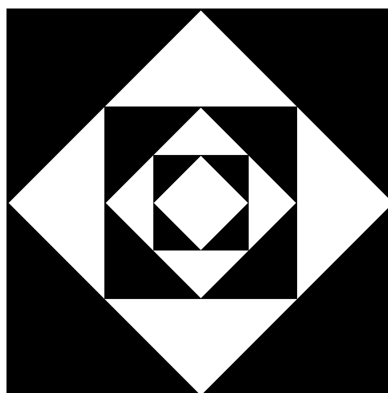
De grafische rekenmachine
Enige tijd geleden heeft de CEVO advies gevraagd aan de vereniging over het voornemen om de grafische rekenmachine in de vierde klas in te voeren met ingang van het komend cursusjaar, ongeacht of er volgens het oude dan wel het nieuwe programma werd lesgegeven. Bij natuurkunde, scheikunde, biologie en economie zal dat vanaf volgend jaar het geval zijn, daar mag een gewone of grafische rekenmachine gebruikt worden. We hebben daarover voor wiskunde negatief geadviseerd (zie Euclides 73-4) en na enig overleg heeft de CEVO geconcludeerd dat er voor deze maatregel onvoldoende draagvlak in het veld aanwezig was. Voor wiskunde geldt dus een aparte regeling: nieuw programma, nieuwe spullen spreekt voor zich. Bij wiskunde A is de regeling als bij de eerdergenoemde vakken, met het oude programma mag u de grafische rekenmachine gaan gebruiken, maar het hoeft niet. Op het examen zal geen voordeel te peuren zijn uit het gebruik ervan. Voor wiskunde B is bij het oude programma de grafische rekenmachine niet toegestaan (zie ook het informatieve artikel van de hoofdredacteur).

De nieuwe bestuursstructuur
Het is uitermate leerzaam om het jaarverslag van 1973 te vergelijken met het jaarverslag van dit jaar. Toen vergaderde het bestuur 5 keer en schreef het 1 officiële brief, naar het Ministerie van Onderwijs. Dat waren nog eens tijden....
De omvang van de bestuurswerkzaamheden is inmiddels dermate groot dat we gezocht hebben naar mogelijkheden om de vereniging wat professioneler te organiseren. Het resultaat van deze zoektocht vindt u in de 8 extra bladzijden in het hart van dit nummer. Om een en ander met u te bespreken is er een extra ledenvergadering uitgeschreven. Komt allen!

Marian Kollenveld

Met Vierkant plezier beleven aan wiskunde

Liesbeth de Cleck

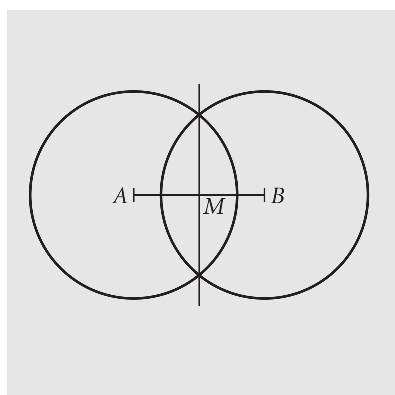


Vierkant voor wiskunde organiseert in augustus 1998 voor het vijfde opeenvolgende jaar wiskundekampen voor leerlingen van 10 tot 17 jaar. Vorig jaar namen 60 leerlingen aan deze kampen deel, een stijging met bijna 50% ten opzichte van 1996. Twee van de drie kampen waren volgeboekt. Het enthousiasme van deelnemers en begeleiders was nog voelbaar bij de reünie in november. Een vergelijkbaar enthousiasme valt te bespeuren op puzzelmarkten. Er werden dit jaar vier puzzelmarkten gehouden op verschillende plaatsen in Nederland, namelijk Zeist, Amsterdam, Nijmegen en Roosendaal. Vele tientallen kinderen bezoeken deze markten. Ze blijven soms uren zitten, gegrepen door een moeilijke puzzel of vastberaden om zoveel mogelijk puzzels op te lossen.
Wat bezielt kinderen om een vrije zondagmiddag op een puzzelmarkt door te brengen? Wat bezielt ze om drie jaar na elkaar mee op wiskundekamp te gaan? Er is natuurlijk het element uitdaging. Heel lang nadenken over een probleem, niet meteen weten hoe dit probleem opgelost moet worden, stap voor stap dichter bij de oplossing komen en uiteindelijk het probleem zelf oplossen… de combinatie van deze factoren draagt bij tot voldoening. Bedenk daarbij nog dat je niet alleen aan deze problemen werkt, maar dat er begeleiders rondlopen die je enerzijds helpen wanneer je vastloopt en in frustratie dreigt te verzanden en die anderzijds een bron zijn van nieuwe puzzels en uitdagingen.
Maar er is meer aan de hand. Om dat te begrijpen kunnen we een blik werpen op het meest recente doe-boekje van Vierkant. Het boekje is geschreven door Zsofia Ruttkay en draagt als titel: ‘Met passer en latje …’. Delen uit dit boekje werden tijdens de afgelopen zomer gebruikt bij twee kampen. De titel van dit boekje verwijst naar het feit dat de lezer van dit boekje uitgenodigd wordt om met een passer en een latje zonder ijking constructies in het vlak te maken. De deelnemers aan kamp D vorig jaar hebben kunnen meemaken hoe zo’n constructie levensgroot gerealiseerd werd op het gras en hoe men oude fietsbanden kan recyclen om constructies te maken. Aan het maken van constructies zijn meerdere aspecten verbonden. Enerzijds moet men om deze constructies te kunnen bedenken gebruik maken van eigenschappen van meetkundige figuren. Wil men bijvoorbeeld de middelloodlijn van een lijnstuk op deze manier construeren dan moet men weten dat alle punten van de middelloodlijn zich op gelijke afstand bevinden van de twee eindpunten van het lijnstuk en dat alle punten van een cirkel zich op gelijke afstand van het middelpunt bevinden. Zie de figuur.
Een ander aspect van constructies is het feit dat constructies een bron van ideeën zijn. Op pagina 6 van het boekje lezen we: ‘Daarom is het bij construeren handig om je van ideeën te voorzien, om een aanwijzing te krijgen bij het formuleren



van een stelling of om uit te proberen hoe een stelling werkt in een bepaalde situatie.'
Dit licht volgens mij één van de belangrijke ideeën van de programma's van Vierkant toe, ideeën die terug te vinden zijn in de doeboekjes en die schuilen achter het opzetten van wiskundekampen,





puzzelmarkten en wiskundeclubs. Een stelling wordt niet geponeerd en vervolgens bewezen maar net als in het echte wiskundeonderzoek wordt een stelling eerst 'ontdekt' met behulp van bijvoorbeeld constructies, men kan de stelling dan gaan formuleren en vervolgens bewijzen.
Met andere woorden het plezier dat een leerling beleeft aan een wiskundekamp is vergelijkbaar met het plezier dat een onderzoeker beleeft aan zijn/haar werk.



Vierkant heeft inmiddels 13 doeboekjes gepubliceerd, het twaalfde doe-boekje was een wiskundekalender. Vierkant bezoekt ook scholen met een deel van het kampprogramma. De begeleiders van Vierkant zijn vrijwilligers, wiskundestudenten, docenten en onderzoekers.

De wiskundezomerkampen vinden dit jaar plaats in Lunteren. Van 10 tot 14 augustus organiseren we kamp Origo voor kinderen van 10 tot 12 jaar en kamp Bèta voor kinderen van 12 tot 14 jaar. De kampen Triangle voor kinderen van 14 tot en met 17 jaar en Exponent voor de twee hoogste klassen van het middelbaar onderwijs, duren van 17 tot en met 21 augustus.

Mensen die belangstelling hebben voor één van onze activiteiten, die doe-boekjes willen bestellen of die als begeleider willen werken, kunnen contact opnemen met het secretariaat van Vierkant.

Vierkant voor Wiskunde
t.a.v. Liesbeth de Clerck
Vrije Universiteit
faculteit wiskunde en informatica
de Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
tel: 020-4447776
e-mail: Vierkant@cs.vu.nl

INTERVIEW

'De docent mechanica verwacht wel dat ze het kunnen'

Roel van Asselt is een bekende naam binnen de wiskundewereld van het hbo. Hij geniet vooral bekendheid als eindredacteur en auteur van een met name in de technische sector wijd verbreide lesmethode. Begonnen als docent wiskunde bekleedt hij nu de functie van senior beleidsmedewerker bij de afdeling Onderwijszaken aan de Hogeschool Enschede. Zijn lestaken zijn nu nog slechts beperkt tot een aantal aansluitingsmodulen in de zomerperiode. Naast zijn functie aan de Hogeschool Enschede is hij tevens directeur van het Landelijk InformatieCentrum Aansluiting vo-hbo (LICA). Ten aanzien van de aansluitingsproblematiek voortgezet onderwijs - hoger beroepsonderwijs geldt hij als een deskundige. Ook is hij werkzaam bij het coördinatiepunt Netwerken Tweede Fase vo van het PMVO. Ten slotte is Van Asselt lid van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde, een beleidsgroep van het Wiskundig Genootschap.

We spreken Van Asselt naar aanleiding van een initiatief dat hij samen met bestuurslid Peter Kop genomen heeft om de hbo-docenten binnen de NVvW te verenigen in een hbo-platform. De initiatiefnemers hielden eind september van het vorige jaar een korte werkconferentie met een aantal hbo-leden uit de vereniging. Een aantal statements uit dit interview zijn ingegeven door hetgeen toen besproken is.

Kun je een omschrijving geven van de positie van het vak wiskunde in het hbo?
Wiskunde wordt als afzonderlijk vak gedoceerd binnen de technische, de economische en de pedagogische sector van het hbo. Daarnaast bestaat er uiteraard een lerarenopleiding wiskunde. Het vak is in de genoemde sectoren vooral een ondersteunend vak. Wiskundige kennis en vaardigheden worden toegepast in de beroepsgerichte en technisch theoretische vakken van de verschillende opleidingen.
Op de werkconferentie bleek dat het belang dat een opleiding aan wiskunde hecht, in het algemeen minder lijkt te worden. Het vak staat onder druk en dreigt als zelfstandig vak zelfs te verdwijnen, zoals binnen het HEO. In andere sectoren wordt wiskunde geprogrammeerd binnen thematisch onderwijs, op maat, op tijd, maar wel minder uitgebreid. Enerzijds zie je dat opleidingen zich concentreren op hun kernvakken, anderzijds worden de opleidingen breder. Vakken als sociale vaardigheden, bedrijfseconomie en informatica doen bijvoorbeeld hun intrede in het technisch onderwijs. Daarnaast is er de afgelopen tien jaar voortdurend bezuinigd op de bekostiging van het hbo als geheel. Op die manier blijft er weinig ruimte voor wiskunde en andere ondersteunende vakken.

Zijn er nog meer oorzaken aan te wijzen?
Misschien zou je het niet verwachten, maar de computeralgebra kan er volgens mij toe leiden dat wiskunde in een isolement raakt. We zien dat computeralgebra bij wiskunde meer en meer wordt toegepast. Er worden op verschillende hogescholen zeer nuttige en interessante dingen gedaan met computeralgebra. Wat echter blijkt is dat de docenten van de beroepsgerichte vakken van een opleiding zelden gebruik maken van deze softwarepakketten. Ook in de beroepspraktijk wordt nauwelijks computeralgebra toegepast. Dat zijn we onlangs nagegaan bij bedrijven als Shell en de Nederlandse Spoorwegen. Als de computeralgebra alleen maar gebruikt wordt bij wiskunde, dan plaats je jezelf buitenspel. De docent mechanica verwacht toch dat je de studenten leert integreren en differentiëren.
Een enkele hogeschool pakt de integratie van computeralgebra binnen alle vakken goed aan: dan worden er wel successen geboekt.
Soms denk ik ook wel eens dat docenten wiskunde in het hbo de moed hebben opgegeven om de traditionele, toepasbare wiskunde aan havo- en mbo-leerlingen aan te bieden. De huidige instroom beheerst helaas te weinig basisvaardigheden wiskunde.

Computeralgebra is dan wellicht een vlucht, of een 'aantrekkelijk alternatief'. Docenten die met computeralgebra experimenteren bemerken tot hun schrik dat ook dan wiskundige basisvaardigheden onmisbaar zijn.



foto Karel Tibbe, Enschede

Je zou kunnen proberen computeralgebra in te zetten om ze die vaardigheden te leren.
Ik heb daar mijn vragen bij. De didactische meerwaarde van computeralgebra is mij niet duidelijk. Kunnen ze beter differentiëren als ze dat met behulp van zeg Derive hebben geleerd? Of begrijpen ze beter wat integreren in essentie is als ze een computeralgebra-pakket leren gebruiken? Wat is de didactische meerwaarde van computeralgebra? Bovendien vind ik dat de computer te vroeg wordt ingezet in het leerproces. Een leerling heeft nu eenmaal nog niet het overzicht over de betreffende wiskundestof die wij als docent wel hebben. De stof is nog te nieuw en vers voor de leerling om er met computeralgebra al nieuw inzicht, of toepassingen, aan toe te voegen.

Zie je dan helemaal geen mogelijkheden voor informatietechnologie binnen het wiskundeonderwijs?
Jawel, als de technologie wordt ingezet ter ondersteuning van het wiskundige handwerk, sta ik er zeker achter, mits de gebruikte software ook bij de kernvakken gebruikt zou worden. Berekeningen die nu met de hand te bewerkelijk zijn, kunnen prachtig met een computeralgebrapakket worden uitgevoerd. Simulaties kunnen zichtbaar maken wat met bord en krijtje of een goed boek niet zichtbaar te maken is. Maar als hulpmiddel bij het leerproces heb ik zo mijn vraagtekens.

Je roept het beeld op van een vak dat in de verdrukking zit. Wat voor gevolgen heeft dat voor de wiskundedocent in het hbo?
Een docent kan te maken krijgen met de rechtspositionele gevolgen. Nu kan een grote hogeschool dat wel opvangen, maar dat kan er toe leiden dat een docent wiskunde uit de technische sector overgeplaatst kan worden naar bijvoorbeeld de PABO. Dat moet je niet doen zonder grondige scholing en begeleiding. Wiskunde in een technische opleiding is toch heel iets anders dan op de PABO.
Verder zie je dat er minder tijd ingeroosterd wordt voor wiskunde. Nieuwe vakken moeten een plaats krijgen en ook nieuwe werkvormen als projectonderwijs krijgen een plek in het curriculum. Er is nog weinig tijd over voor bijvoorbeeld complexe contexten. Je kunt wel veel willen, maar het moet ook passen in de jou toegemeten tijd.

Zou het erg zijn als wiskunde als zelfstandig vak verdwijnt?
Ik vind van wel. Per slot van rekening wordt wiskunde nog steeds toegepast in andere vakken. Daarnaast zullen afgestudeerden in de vakliteratuur wiskundige begrippen en notaties tegen komen. Een afgestudeerde van het hbo moet daar niet voor weglopen. Wiskunde is immers ook een universeel communicatiemiddel. Ook de algemeen vormende waarde van het vak vind ik waardevol, hoewel daar door de tijdsdruk niet veel van komt.
Kortom, ik zou het jammer vinden dat wiskunde het lot deelt met een vak als natuurkunde, dat steeds minder als zelfstandig vak aangeboden wordt, maar bij de kernvakken 'er even bij wordt gedaan'.

Je bent directeur van het LICA en zult in die functie wel zicht hebben op de aansluiting voortgezet onderwijs - hbo voor wat betreft wiskunde.
Je snijdt hier een belangrijk aspect van het aansluitingsprobleem aan. In het algemeen sluiten de wiskundevakken in het havo voor wat betreft de onderwerpen goed aan bij de hbo-wiskunde. Er is in sommige gevallen zelfs sprake van enige overlapping. Ook op het eindexamenniveau is weinig aan te merken. De examenvraagstukken zijn beslist niet eenvoudig. En toch is er sprake van een aansluitingsprobleem.

Waar ligt het probleem dan?
We merken dat onze eerstejaars studenten de wiskundestof uit het havo in te geringe mate beheersen. Als ze de examenstof werkelijk zouden beheersen is er geen vuiltje aan de lucht. Ze halen gemiddeld, landelijk, een 5,3 of nog minder op het examen en met een 7,7 voor het schoolonderzoek is een 7 op de eindlijst een feit. Het ontbreekt ze aan een stuk doorleefde, bezonken wiskundige kennis en inzicht.

Hoe uit dat lage beheersingsniveau zich dan?
Bijvoorbeeld in het gebrek aan algebraïsche vaardigheden en het systematisch aanpakken van vraagstukken. Studenten ontberen vaardigheden die ze volgens het examenprogramma in ruime mate zouden moeten beheersen. Logaritmen, exponentiële functies, de techniek en het begrip van het differentiëren, de kettingregel; eenmaal in de propedeuse kunnen ze er niet mee uit de voeten. Het merkwaardige is dat dit probleem zich zowel onder havo'ers als mbo'ers voordoet. Het is niet een exclusief havo-probleem.

Nu heb je het vooral over de technische sector. Treedt zoiets ook op in overige sectoren?
Ja, op onze conferentie werd hetzelfde verschijnsel gesignaleerd bij de economische sector en de PABO's. Studenten met wiskunde A blijken nog grote moeite te hebben met letterrekenen en met het cijferen. Eén van de deelnemers meldde dat er op de PABO's nog veel cijfervaardigheden bijgespijkerd moeten worden.

Heb je enig inzicht in de oorzaken van dit verschijnsel?
Eén van de belangrijkste oorzaken is dat genoemde algebraïsche vaardigheden en het systematisch oplossen van complexe vraagstukken geen expliciet deel uit maken van de examenprogramma's. Wat geen onderdeel is van het examen mag je niet bekend veronderstellen bij de student. In de basisvorming is het onderdeel algebra nog minder prominent aanwezig.
Daarnaast denk ik dat het de leerlingen ontbreekt aan een zekere mate van vasthoudendheid, zelfvertrouwen en doorzettingsvermogen. Als een opgave niet direct op te lossen is, geven ze het wel erg snel op en wachten op de uitwerking van de docent. Ik verwacht overigens wel dat dit verandert in het studiehuis.

Zou het ook kunnen liggen aan de cultuurverschillen tussen voortgezet onderwijs en hbo? Ik bedoel, het hbo heeft de naam altijd wat afstandelijk te zijn ten opzichte van de student in vergelijking met het voortgezet onderwijs.
Dat klopt misschien wel, maar binnen het hbo is er veel ten goede veranderd. We kennen in het hbo het mentoraatsysteem, studiewijzers, projectonderwijs, enzovoorts. Ook bestaan er aansluitingscursussen voor deficiënte studenten, al geloof ik niet dat je in een paar weken tijd een wiskunde-deficiëntie kan oplossen. Sommige hogescholen besteden een half studiejaar aan uitsluitend herhaling van de havo-stof. En het hogeschoolmanagement plaatst tegenwoordig vaak vraagtekens bij lage rendementen als gevolg van slechte tentamenresultaten. Ook de situatie dat het hbo liever studenten uit het vwo dan uit het havo had, is veranderd. In veel beleidsstukken van hbo-instellingen wordt de havo de 'koninklijke route' voor het hbo genoemd. Maar goed, er heerst nog niet een sfeer van 'we slepen de leerlingen er door'. Ik kan me voorstellen dat een havist het meeste hinder heeft van die afstandelijkheid, zo daar nog sprake van is. Een vwo'er slaat zich daar wel door heen en mbo'ers zijn het al gewend.

Verwacht je verbeteringen in de aansluiting tussen beide schoolsoorten als gevolg van de nieuwe Tweede Fase?
Ja, mede door de komst van het Studiehuis. De vakomschrijvingen zien er ook goed uit. De vakontwikkelgroep wiskunde heeft goed werk geleverd, hoewel ik het merkwaardig vond dat het hbo alleen door een docent van een lerarenopleiding werd vertegenwoordigd en niet door iemand van de grootgebruikers. Gelukkig hadden we, op eigen initiatief, goed contact met de vertegenwoordiger uit het hbo en ontstond een goede uitwisseling van ideeën en wensen.

Zijn je nog dingen opgevallen in de nieuwe opzet?
Tot mijn genoegen is het aandeel ruimtemeetkunde teruggebracht. Dit onderdeel uit de wiskunde is moeilijk te leren en bezorgt het vak geen goed imago. Je hebt zwart-wit gezegd nu eenmaal ruimtelijk inzicht of niet. Bij analyse of statistiek is veel meer progressie te verwachten in de leercurve van de student. Hopelijk wordt Wiskunde B nu weer aantrekkelijk voor havo'ers in de Tweede Fase vo.

Ontstaan er geen nieuwe aansluitingsproblemen nu het voortgezet onderwijs het concept van het studiehuis heeft omarmd en het hbo voortgaat op de oude weg?
Deze voorstelling van zaken is inmiddels wat achterhaald. Natuur-

33e Nederlands Mathematisch Congres

Op *16 en 17 april 1998* zal het 33e Nederlands Mathematisch Congres plaatsvinden op de campus van de Universiteit Twente.
Het programma zal onder andere het volgende symposium omvatten:

Wiskunde in VWO-profiel Cultuur en Maatschappij

Coördinator: drs. E.M. Welling
Donderdag 16 april, 14 - 17 uur
Met bijdragen van:
J. de Lange, Freudenthal instituut:
'Dromen tegen de verdomming'
A.J. Hakkert, leraar wiskunde en auteur van Moderne Wiskunde:
'Succesfactoren voor Wiskunde A1'
J.G.F. Veldhuis, voorzitter VSNU-commissie VWO-WO, Collegevoorzitter RUU:
'Wiskunde moet ook voor alfa's een basisvak zijn'
S. Stuurman, hoogleraar Europese Studies aan de Erasmus Universiteit Rotterdam:
'Modern barbarendom'

Met tot besluit een forumdiscussie.

Verder zijn er nog symposia over:
- Wiskunde Toegepast
- Tele(mathe)matica
- Wiskunde in Bedrijf
- Wiskunde uit de kunst

Inschrijven kan via internet:
http://www.math.utwente.nl/~nmc/registratie.html
of per post:
G.F.Post, Faculteit Toegepaste Wiskunde, Postbus 217, 7500 AE Enschede.
Het inschrijfgeld is:
WG-lid: *ƒ* 50,– Student: *ƒ* 25,– Anders: *ƒ* 75,–
Nadere informatie: http://www.math.utwente.nl/~nmc
of R.M.J.Damme: 053 - 4893417

lijk moet er ook in het hbo nog meer studentgericht worden gewerkt. De jaren van de vele hoorcolleges liggen echter achter ons. Ook het hbo is druk in de weer met onderwijsvormen als project- en probleemgestuurd onderwijs. Het aantal wekelijkse werkcolleges neemt af. We zien ook dat lesmethoden steeds meer op werkboeken in plaats van tekstboeken gaan lijken. Studiewijzers zijn gemeengoed in het hbo. Ik denk dat het studiehuis goed aansluit bij de nieuwe onderwijsvormen in het hbo.

Een belangrijk verschil tussen wiskunde in het voortgezet onderwijs en dat in het hbo is de plaats van contexten. Als je een wiskundeboek voor havo vergelijkt met dat van een sector in het hbo, kun je de verschillen goed zien. Eerstgenoemd boek staat vol contexten, laatstgenoemd boek kent bladzijden vol routinevraagstukken. Ligt het in de lijn der verwachting dat de hbo-wiskunde in de toekomst meer op contexten georiënteerd zal worden?
In feite is er in het hbo al continu sprake van context-georiënteerde wiskunde, maar dan veel intensiever en minder vrijblijvend: namelijk binnen de beroepsgerichte vakken. Daarnaast is het natuurlijk verstandig om ook bij wiskundelessen veel aandacht te besteden aan de toepassing ervan. Ik hoor overigens dan vaak studenten de vraag stellen of ze contexten ook moeten kennen op het tentamen. Het is voor studenten niet altijd even eenvoudig een context-vraagstuk op te lossen. Er bestaat dan geen rechttoe-rechtaan oplossingsmethode waar ze zich op kunnen voorbereiden. Overigens zou ik contexten niet zo zeer als leidraad in de wiskunde kiezen, maar meer als motiverend aanloopje of als toepassing achteraf. Ik geloof niet dat leerlingen van de contextrijke Wiskunde A nu zoveel vaardigheden opdoen of wiskundige begrippen leren beheersen.

Maar zijn die talrijke routineopgaven nog wel zinvol in de beperkte tijd? Je zou toch tijd kunnen winnen op dit terrein met behulp van de computeralgebra?
Nou ja, op die manier slijpt een bepaalde vaardigheid goed in. Maar, inderdaad, de balans slaat wel eens door naar een sommencultuur, die ongewenst is. Docenten weten dat te waarderen. Ik kan me voorstellen dat je een leerlijn ontwerpt waarin computeralgebra een bepaalde verrijkende rol speelt. Maar zolang docenten uit hoofdvakken geen computeralgebra gebruiken, ben je toch aan hen verplicht de studenten voldoende wiskundige vaardigheden te leren. De begripsvorming stokt als studenten steeds weer vastlopen in eenvoudig rekenwerk in de beroepsgerichte vakken.

We zijn aan het einde gekomen van het interview. Wat zijn tenslotte de plannen van het hbo-platform in de NVvW?
Het ligt in de bedoeling een studiedag te organiseren over de problematiek die ook in ons gesprek naar voren is gekomen. De publicatie daarvan kun je in Euclides verwachten.

Victor Schmidt

De 36e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1997



Fred Bosman

De eerste ronde

De eerste ronde is gespeeld op vrijdag 11 april 1997. De deelnemers kregen drie uur de tijd om te proberen een antwoord te vinden op dertien vraagstukken; zes in de A-categorie, waarmee twee punten per opgave konden worden gescoord; vier in de B-categorie, goed voor drie punten per opgave en drie in de C-categorie met vier punten per opgave. De maximaal te behalen score was dus zesendertig punten. De maximale score werd dit jaar behaald door twee deelnemers.

Het hieronder volgende overzicht van de resultaten van de eerste ronde is gebaseerd op de gegevens van 2605 leerlingen, die werden opgestuurd door de wedstrijdleiders van 247 scholen. Ten opzichte van 1996 betekent dat (jammer genoeg weer) een lichte daling in het aantal deelnemers.

De school met de hoogste resultaten van de beste vijf deelnemers wint de door Shell ter beschikking gestelde wisselprijs. Dat was dit jaar het Stedelijk Gymnasium in Leiden met een score van 158. Dat is een record, want nooit eerder in de 36-jarige geschiedenis van de Wiskunde Olympiade in Nederland is een zo hoge score, 158 bij een totaal van 180 (ofwel gemiddeld per leerling meer dan 30 punten), gehaald.

De deelnemende leerlingen waren als volgt verdeeld over de verschillende klassen en schoolsoorten:

5-vwo 1433

5-havo 80

4-vwo 757

4-havo 164

2e of 3e klas 171

De verdeling van de leerlingen over de scores is als volgt:

Score	Leerlingen
0	25
1	2
2	68
3	30
4	97
5	98
6	116
7	158
8	134
9	187
10	123
11	158
12	136
13	142
14	154
15	134
16	114
17	100
18	110

Score	Leerlingen
19	70
20	93
21	66
22	68
23	40
24	34
25	31
26	24
27	23
28	18
29	15
30	10
31	5
32	4
33	13
34	2
35	1
36	2

Leerlingen die een score behaalden van 26 punten of meer werden uitgenodigd voor de tweede ronde, dat waren er 117. De tweede ronde heeft plaats gevonden op vrijdag 19 september 1997 in Eindhoven. Door het bestuur van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade werden nog zes andere leerlingen uitgenodigd om mee te doen.

Op het resultatenformulier van de eerste ronde konden wedstrijdleiders aangeven hoeveel deelnemers de verschillende opgaven goed gemaakt hadden. Van 2423

leerlingen zijn deze gegevens bekend. Hieronder staat dit resultaat in tabelvorm. In de rij 'percentage' staat vermeld hoeveel procent van de deelnemers de betrokken opgave goed heeft opgelost.
Uit deze tabel ontstaat een goede indruk van de moeilijkheidsgraad van de opgaven. De verschillen tussen de opgaven onderling zijn wat kleiner dan die van vorig jaar. De opgaven in de B- en C-categorie zijn, zoals ook de bedoeling is, moeilijker dan de A-opgaven. De opbouw in moeilijkheidsgraad is ook beter dan die van vorig jaar, uitgezonderd vraagstuk B1. Dat had op grond van de resultaten tot de A-categorie kunnen behoren. De vraagstukkencommissie gebruikt deze resultaten als achtergrondinformatie bij het samenstellen van de opgaven voor 1998.

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	C1	C2	C3
percentage	64	75	86	37	26	34	73	13	35	8	4 1	9	11

De tweede ronde

Zoals reeds vermeld vond de tweede ronde plaats in Eindhoven op vrijdag 19 september 1997. Van de 123 uitgenodigde leerlingen hebben er 117 daadwerkelijk deelgenomen. Zij kregen weer drie uur de tijd. Er moesten vijf opgaven worden opgelost. De maximale score per opgave was 10 punten. Bij een gelijke score in de tweede ronde is het puntenaantal dat in de eerste ronde is behaald bepalend voor de uitslag.

De tien prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1997 staan in de lijst hieronder. De door hen behaalde scores in elke ronde zijn erbij vermeld.

		2e	**1e**
1	Fokko van de Bult, Oegstgeest	48	36
2	Willem Jan Palenstijn, Oegstgeest	31	30
3	Herbert Beltman, Markelo	27	31
4	Wouter van der Bilt, Leusden (gedeelde plaats)	26	29
4	Maxim Hendriks, Oegstgeest (gedeelde plaats)	26	29
6	Guido Schmeits, Heeze	26	28
7	Hugo Buddelmeijer, Delft	25	35
8	Gert Jan Kok, Rijswijk	25	33
9	Ard Willems, Vierlingsbeek	25	27
10	Rink Hallmann, Silvolde	24	33

Het scoreoverzicht van alle deelnemers aan de tweede ronde staat in de volgende tabel:

Score	**Leerlingen**
niet deelgenomen	7
0 t/m 9	29
10 t/m 14	38
15 t/m 19	35
20 t/m 24	12
25 t/m 29	7
30 t/m 50	2

Een vergelijking met dezelfde tabel van vorig jaar geeft aan dat de opgaven voor de tweede ronde dit jaar moeilijker zijn geweest dan die van 1996.
Ter informatie: in 1996 behaalden 24 deelnemers minder dan 15 punten. Dat zijn er nu 60. In 1996 behaalden 28 deelnemers meer dan 24 punten, dat zijn er dit jaar 9.

Kijk voor de **opgaven tweede ronde** verder op de volgende pagina.

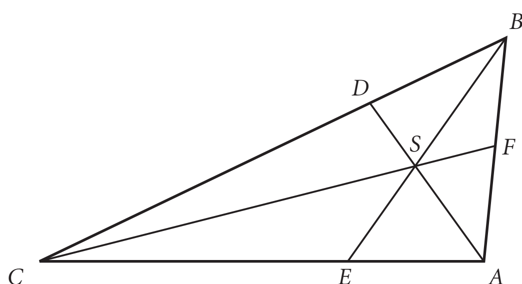


NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Tweede ronde, 19 september 1997

1 Bij elk positief geheel getal n definiëren we $f(n)$ als het product van de som van de cijfers van n met n zelf.
Voorbeelden: $f(19) = (1 + 9) \times 19 = 190$,
$f(97) = (9 + 7) \times 97 = 1552$.
Toon aan dat er geen getal n bestaat met
$f(n) = 19091997$.

2 Binnen een driehoek ABC snijden de lijnen AD, BE en CF elkaar in S.
Gegeven is dat $AS : DS = 3 : 2$ en $BS : ES = 4 : 3$.
Bepaal de verhouding $CS : FS$



3a Bekijk de tweedegraadsvergelijking
$x^2 + ?\,x + ? = 0$
Twee spelers zetten achtereenvolgens elk op de plaats van een vraagteken een geheel getal.
Toon aan dat de tweede speler er altijd voor kan zorgen dat de vergelijking twee gehele oplossingen krijgt.
Nota bene: we zeggen dat de vergelijking ook twee gehele oplossingen heeft als deze gelijk zijn, bijvoorbeeld allebei gelijk aan 3.

b Bekijk de derdegraadsvergelijking
$x^3 + ?x^2 + ?x + ? = 0$
Drie spelers zetten achtereenvolgens elk op de plaats van een vraagteken een geheel getal. De vergelijking blijkt drie gehele (waarbij weer eventueel gelijke) oplossingen te hebben. Gegeven is dat twee spelers elk een 3 op de plaats van een vraagteken gezet hebben.
Welk getal heeft de derde speler gezet? Bepaal dat getal en de plaats waar het gezet is en bewijs dat er maar één getal mogelijk is.

4 We bekijken een octaëder, een regelmatig achtvlak, waarvan één van de zijvlakken rood is geverfd en de zeven andere zijvlakken blauw. We werpen de octaëder als een dobbelsteen. Het vlak dat boven komt wordt geverfd: als het rood is wordt het blauw geverfd en als het blauw is wordt het rood geverfd. Vervolgens werpen we de octaëder nog eens en verven weer volgens de bovenstaande regel. In totaal werpen we de octaëder 10 keer.
Hoeveel verschillende octaëders kunnen we krijgen na afloop van de 10e keer verven?
(Twee octaëders zijn verschillend als ze niet door draaiing in elkaar zijn over te voeren.)

5 Gegeven is een driehoek ABC en een punt K binnen de driehoek. Het punt K wordt gespiegeld in de zijden van de driehoek: P, Q en R zijn de gespiegelden van K in respectievelijk AB, BC en CA. M is het middelpunt van de cirkel door de hoekpunten van driehoek PQR. M wordt weer gespiegeld in de zijden van driehoek ABC: P', Q' en R' zijn de gespiegelden van M in respectievelijk AB, BC en CA.

a Bewijs dat K het middelpunt van de cirkel door de hoekpunten van driehoek $P'Q'R'$ is.

b Waar moet je K kiezen binnen driehoek ABC zodat M en K samenvallen? Bewijs je antwoord.



T3

- staat voor ‘Teachers teaching with technolgy’
- is een Europees nascholingsproject
- wordt in Nederland uitgevoerd door het APS

Doel T3

- docenten wiskunde en natuurwetenschappen scholen in het gebruik van informatietechnologie in de les
- ervaringen uitwisselen
- docenten enthousiasmeren

Cursusaanbod T3

- Masterclass grafische rekenmachine
- de grafische rekenmachine bij natuurwetenschappen
- de symbolische rekenmachine
- meetkunde met Cabri
- gebruikersdagen grafische rekenmachine

Informatie:
APS Informatiepunt wiskunde
Postbus 85475 3508 AL Utrecht
tel: 030 - 2856722 email: wiskunde@aps.nl
URL: www.aps.nl/vo/wiskunde/wiskunde.htm

Masterclass grafische rekenmachine



- is de eerste T3-cursus van het APS
- bereidt u voor op de invoering van de grafische rekenmachine in de tweede fase
- biedt gelegenheid uw kennis te verdiepen, te verbreden en toe te passen op de klasse-praktijk
- brengt u in contact met ervaringen van andere docenten en bij andere vakken
- heeft een omvang van vijf dagdelen
- gebruikt de TI-83 als grafische rekenmachine
- vereist geen voorkennis

Cursusdata

- Uitvoering 1: 6 mei (hele dag), 10 juni (hele dag) en 24 juni (middag)
- Uitvoering 2:15 mei (hele dag), 12 juni (hele dag) en 26 juni (middag)
- De cursus vindt plaats in Utrecht.

Kosten

- Cursuskosten ƒ 400,--
- Aanschaf TI-83 ƒ 150,--

Advertentie
ROOS software

GRAFIEK voor Windows

Scholenprijs Stedelijk Gymnasium Leiden

Bijzondere prestaties Wiskunde Olympiade

Kees Hoogland, Ynske Schuringa

Inleiding

Eerder in dit nummer treft u in het artikel van Fred Bosman de gegevens aan van de 36*e* Nederlandse Wiskunde Olympiade.
De redactie heeft de prijsuitreikingen van de diverse onderdelen bezocht en wil nog even wat uitgebreider stilstaan bij de opmerkelijke resultaten die er dit jaar geboekt zijn.

Scholenprijs 1997

Het Stedelijk Gymnasium Leiden heeft dit jaar met overmacht de scholenprijs in de wacht gesleept. De beste vijf leerlingen scoorden maar liefst 158 van de maximaal $5 \times 36 = 180$ te behalen punten. Hun namen zijn:

Fokko van de Bult (36 punten)
Maxim Hendriks (29 punten)
Willem Jan Palenstijn (30 punten)
Bart Ponsioen (33 punten)
Menno Sormani (30 punten)

Dat deze leerlingen wel zeer brede wiskundige vaardigheden hebben ontwikkeld blijkt uit het feit dat vier van deze vijf leerlingen eerder dit jaar ook al met de eer gingen strijken in de landelijke finale van de Wiskunde A-lympiade.
Op de druk bezochte prijsuitreiking werden de prijzen wederom uitgereikt door Jan van de Craats. Daarbij was er natuurlijk ook aandacht voor docent Willem Claas, die al jaren op het Stedelijk Gymnasium de leerlingen bij de Wiskunde Olympiade begeleidt.
Dat drie van deze vijf leerlingen ook bij de eerste 10 van de landelijke finale terecht zijn gekomen, zal waarschijnlijk nu geen verbazing meer wekken.



Prijsuitreiking landelijke finale

Op 14 november 1997 vond de prijsuitreiking plaats van de landelijke finale.
Mede door de inspanningen van Rob Tijdeman, voorzitter van de



Nederlandse Onderwijs Commissie Wiskunde (NOCW), waren er dit jaar voor het eerst zelfs geldprijzen te verdelen.



Op de ene foto ziet u voorzitter Tijdeman met de twee biljetten van 1000 gulden, die hij aan de twee jongens die op de eerste en tweede plaats kwamen, zal overhandigen. Op de andere foto staan de tien prijswinnaars met links Jan Donkers, die hen gaat trainen.

De al eerder genoemde Fokko van de Bult had inmiddels ook al een zilveren medaille gehaald op de Internationale Wiskunde Olympiade.
Wie weet gaat Nederland in de zomer hoge ogen gooien op de Internationale Wiskunde Olympiade.

40 jaar geleden

1100
In $\triangle ABC$ is CD de deellijn van $\angle C$ (D ligt op AB).
Construeer $\triangle ABC$, als gegegeven zijn: AC, CD en DB.

C. VISSCHER

1101
Van de piramide $\frac{T}{ABCD}$ is het grondvlak $ABCD$ een rechthoek; $AT = BT$ en $\angle TAB = \angle TAD$.
Gegeven zijn: $AB = 6$ cm; $BC = 4\frac{1}{2}$ cm en de straal R van de omgeschreven bol van de piramide = 4 cm.
Construeer het zijvlak TCD in ware grootte.

(Eindex. Gymn. 1957)

1102
Gegeven is een kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$; $AB = a$. Het snijpunt van AC en BD is S.
Men brengt een bol aan door de punten A, B, G en S.
a Construeer in de stereometrische figuur het middelpunt van de bol en bereken zijn straal.
b Bewijs, dat BC de bol raakt.
c Construeer in ware grootte de hoek, die de raakvlakken door CD aan de bol met elkaar maken.

(Eindex. Gymn. 1957)

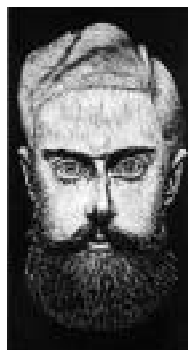
1103
Van $\triangle ABC$ is (M, R) de omgeschreven cirkel; de oppervlakte van $\triangle ABC$ is O en de oppervlakte van de voetpuntsdriehoek van een punt P binnen de cirkel (M, R) is O_v.
a Bewijs: $O_v \leq \frac{1}{4}O$.
b Bewijs door toepassing van *a*. op een bepaald punt van $\triangle$ABC de *ongelijkheid van Weitzenböck*:
$\Sigma a^2 \geq 4 \times O\sqrt{3}$
voor elke driehoek.

R. KOOISTRA

Opgaven uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 45 (1957-1958)

Aankondiging Escherwedstrijd

Dit is een vooraankondiging van de Escherwedstijd 1998, georganiseerd door het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras en de Stichting Ars et Mathesis. De prijsvraag wordt gepubliceerd in het aprilnummer van Pythagoras, dat eind maart 1998 verschijnt. Verder wordt de prijsvraag gepubliceerd in Euclides 73-7 en waarschijnlijk ook in de Nieuwe Wiskrant en de Vlaamse bladen Uitwiskeling en het tijdschrift van de Vereniging van Vlaamse Wiskundeleraars.



Op wiskundig gebied is 1998 het jaar van Lewis Carroll en M.C. Escher. Lewis Carroll overleed honderd jaar geleden, op 14 januari 1898. Maurits Cornelis Escher werd honderd jaar geleden geboren te Leeuwarden, op 17 juni 1898. Zijn honderdste geboortedag is aanleiding tot verschillende activiteiten.

In Nederland vinden er drie tentoonstellingen plaats:
- Van 17 juni tot eind juli een Escher-expositie in de Princessehof te Leeuwarden;
- In november en december 1998 in Kasteel Groeneveld te Baarn een expositie over Escher's leven;
- Eveneens in november en december 1998 in de Kunsthal te Rotterdam een expositie over Escher's werk.

Verder worden er in diverse landen tentoonstellingen aan Escher's kunst gewijd. Zo is er tot 26 april in de National Art Gallery te Washington de tentoonstelling M.C. Escher: A Centennial Tribute. Van 24-28 juni 1998 wordt in Rome een internationale conferentie gehouden, georganiseerd door onder anderen prof. Doris Schattschneider, bekend van haar boeken Visions of Symmetry en M.C. Escher Kaleidocycles.

Escherwedstrijd 1998

Het wiskundetijdschrift Pythagoras wijdt het aprilnummer van 1998 helemaal aan M.C. Escher. In dit nummer wordt ook een Escherwedstrijd uitgeschreven, die Pythagoras samen met de Stichting Ars et Mathesis organiseert. Deelname aan de prijsvraag staat open voor alle inwoners van Nederland en Vlaanderen, maar de prijsvraag is met name bedoeld voor middelbare scholieren, hetgeen zich uit in diverse prijzen voor scholieren uit de onderbouw en bovenbouw.
Er is ook een klassenprijs. Totaal bedrag aan prijzen: ca. *ƒ* 5000,–.

De prijsvraag loopt van april 1998 tot en met de herfstvakantie in oktober 1998. Hiermee wordt het mogelijk de prijsvraag in te passen in de wiskunde- en/of tekenlessen.
De prijsuitreiking vindt plaats in november 1998, op de jaarlijkse Ars et Mathesis-dag te Baarn.

Meer informatie is te verkrijgen bij:
e-mail: pythagoras@wins.uva.nl
Internet: www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/Escher98/
Telefoon: 053-4893459 (Erjen Lefeber).

Verschenen

Henk van Dijk
Mathemalie, wiskunde als thema in de filatelie
Uitg. Detail, Groningen (1996)
ƒ 12,50; 36 bladzijden
ISBN 90-75536-04-6

In dit boekje worden diverse postzegels en andere filatelistische elementen met wiskundige aspecten beschreven. Bijvoorbeeld met beeltenissen van beroemde wiskundigen, maar ook wiskundige zaken zoals de gulden snede en het telraam. Er zijn ook literatuurverwijzingen opgenomen en er worden min of meer gespecialiseerde filatelistische verenigingen genoemd.

Verschenen

E.M. Koerts
De ondernemende leerling
Uitg. Début, Rijswijk (1995)
149 bladzijden
ISBN 90-802348-2-6

Dit is een proefschrift met als ondertitel 'Een onderzoek naar het leren studeren door havlot-schematiseren in het kader van zelfstandig leren'. Het boek werd geschreven op grond van ervaringen uit de eigen onderwijspraktijk. Als centraal thema geeft de auteur aan: het systematisch leren opslaan van kennis en informatie.

Opgave 684

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Recreatie

Omdat leerlingen weten dat ik wiskundige puzzels en spelletjes verzamel, komen ze vaak aan m'n tafel staan met de vraag 'Kent u deze al?'
Zo ook Linda, die een aantal weken geleden vroeg: 'Kunt u met de getallen 1, 2, 3 en 4 de uitkomst 28 maken? U mag alleen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.'
Na enig nadenken zei ik:
'Bedoel je $4 \times (2 \times 3 + 1) = 28$?'
'Goed zo, maar kunt u het nu ook met de getallen 2, 3, 4 en 5?' En ze bleef maar vragen. Totdat ze stopte bij de getallen 6, 7, 8 en 9. Voor de getallen 7, 8, 9 en 10 had ze namelijk nog geen oplossing gevonden. Uiteindelijk heb ik haar klas aan het werk gezet en gezamenlijk vonden we alle oplossingen tot en met de getallen 9, 10, 11 en 12.

Steven, die vorig jaar in groep acht met het 24-GAME had meegedaan zei: 'Oh, met uitkomst 24 kun je veel verder komen'. Achteraf viel dat zwaar tegen want we konden geen oplossing voor 8, 9, 10 en 11 vinden.

Recreatie 684 was geboren: bij welke uitkomst kun je een zo lang mogelijke, ononderbroken, reeks sommetjes maken met die uitkomst?

Tot uitkomst 5 is het triviaal:
$n + (n + 3) - (n + 1) - (n + 2) = 0$
$(n + (n + 3)) / ((n + 1) + (n + 2)) = 1$
$(n + 1) + (n + 3) - n - (n + 2) = 2$
$(n + 3) - n \times ((n + 2) - (n + 1)) = 3$
$(n + 2) + (n + 3) - n - (n + 1) = 4$

De uitkomsten 33, 34 en 35 vallen direkt af, omdat deze uitkomsten met 1, 2, 3 en 4 niet te maken zijn. De grootste uitkomst, die met 1, 2, 3 en 4 wel te maken is, is 36: $(1 + 2) \times 3 \times 4 = 36$.

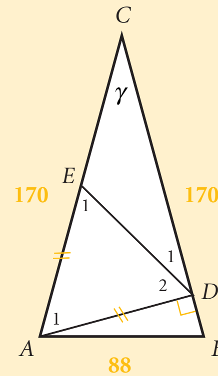
$(2 \times 3 + 1) \times 4$	= 28
$(2 \times 5 - 3) \times 4$	= 28
$(6 / 3 + 5) \times 4$	= 28
$4 \times 7 \times (6 - 5)$	= 28
$(7 - 5) \times (6 + 8)$	= 28
$(9 - 7) \times (6 + 8)$	= 28
$10 \times (9 - 7) + 8$	= 28
$10 \times (11 - 9) + 8$	= 28
$(10 + 11) \times 12 / 9$	= 28

$1 \times 2 \times 3 \times 4$	= 24
$2 \times (3 + 4 + 5)$	= 24
$6 \times (3 + 5 - 4)$	= 24
$4 \times (5 + 7 - 6)$	= 24
$6 \times (5 + 7 - 8)$	= 24
$6 \times 8 / (9 - 7)$	= 24
$8 \times 9 / (10 - 7)$	= 24

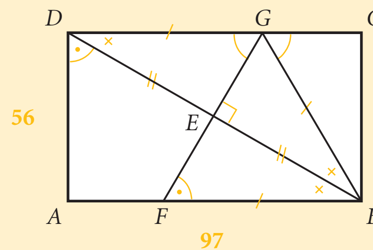
Uw oplossing binnen een maand ingezonden levert maximaal 5 ladderpunten op.

Oplossing 681

Recreatie



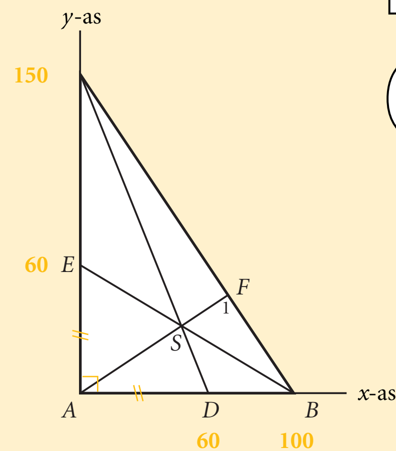
1 $\angle A_1 = 90^\circ - \gamma$, dan $\angle E_1 = \angle D_2 = 45^\circ + \frac{1}{2}\gamma$
Dus $\angle D_1 = 45^\circ - \frac{1}{2}\gamma$.
Als $ED = DC$, dan $45^\circ - \frac{1}{2}\gamma = \gamma$, oftewel $\gamma = 30^\circ$.
Dan moet sin $15^\circ = 44/170$ zijn. Tegenspraak.
Het blijkt dat $ED = 85{,}0007$ en $EC = 84{,}9986$.



2 Tan $\angle D_1 = 97/56$, dus $\angle D_1 = 60{,}0013^\circ$ en daardoor ook $\angle F_1 = 60{,}0013^\circ$.
Dus $\triangle FBG$ is niet gelijkzijdig.
Het blijkt dat $BF = BG = DG = 64{,}6649$ en $FG = 64{,}6624$.

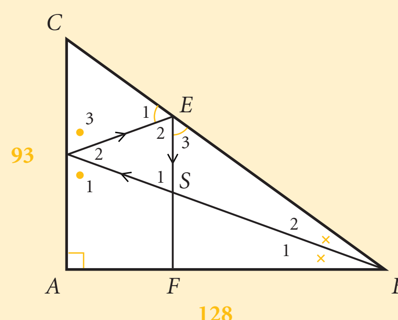
3 In elke driehoek ABC geldt:
$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4 \cdot z_a{}^2$
$2c^2 + 2a^2 = b^2 + 4 \cdot z_b{}^2$
$2a^2 + 2b^2 = c^2 + 4 \cdot z_c{}^2$

$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 16 \cdot A^2$,
waarbij oppervlakte $\triangle ABC = A =$
$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ met $s = (a+b+c)/2$.
In ons geval geldt: $a = 146$, $b = 102$, $c = 52$, $z_a = 35$, $z_b = 97$, $z_c = 4\sqrt{949}$ en $A = 1680$.
Het is nog steeds een onopgelost probleem of alle zeven waarden tegelijkertijd geheel kunnen zijn!



4 CD: $y = -2\frac{1}{2}x + 150$
BE: $y = -\frac{3}{5}x + 60$
Snijpunt $S(900/19, 600/19)$
Rico van AS is dus $\frac{2}{3}$; rico van BC is $-\frac{3}{2}$.
Produkt rico's is dus -1, waardoor inderdaad
$\angle F_1 = 90^\circ$

5 Stel $\angle B_1 = \angle B_2 = \beta$. Dan $\angle D_1 = \angle D_3 = 90^\circ - \beta$.
Dus $\angle D_2 = 2\beta$.
$\angle C = 90^\circ - 2\beta$ en $\angle E_1 = \angle E_3 = 3\beta$.
Dus $\angle E_2 = 180^\circ - 6\beta$ en $\angle S_1 = 4\beta$.
Als $DS = DE$, dan $180^\circ - 6\beta = 4\beta$ oftewel $\beta = 18^\circ$.
Dan moet gelden tan $36^\circ = 93/128$. Tegenspraak.
Idem als $DE = DC$.
Het blijkt dat $DS = 51{,}4070$; $DE = 51{,}4081$ en $DC = 51{,}4094$.
In een regelmatige vijfhoek vinden we
tan $36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.



Met 66 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 25,–:

Kees Nagtegaal
Haaswijkweg West 42
3319 GD Dordrecht

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van de volgende nummers van Euclides. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
7	01-05-98	19-03-98
8	18-06-98	07-05-98
1	03-09-98	17-07-98

Kangoeroe
vr. 20 maart 1998
TU Eindhoven:
040 - 2472738
jand@win.tue.nl

Wiskunde en de Grafische Rekenmachine
wo. 25 maart 1998
APS-conferentie:
merken, didactiek, laatste nieuws
APS: 030 - 2856722

Wiskunde Olympiade Voorronde
vr. 3 april 1998
Cito: 026 - 3521294
Fred.Bosman@cito.nl

Wiskunde uit de kunst
do. 16 april 1998
Symposium Abacus, Utwente
053 - 4893435

33e Nederlands Mathematisch Congres
do. 16 april/vr. 17 april 1998
UTwente,
R.M.J. van Damme
053 - 4893417
Aankondiging zie blz. 205

Wiskunde in de ROC's
do. 23/vr. 24 april 1998
twin@fi.ruu.nl

Examendata
vbo B:
do. 14 mei 1998.
vbo/mavo C/D:
di. 19 mei 1998.
havo wiskunde A:
vr. 15 mei 1998.
havo wiskunde B:
wo. 27 mei 1998.
vwo wiskunde A:
di. 19 mei 1998.
vwo wiskunde B:
vr. 15 mei 1998.
herexamens:
di. 23 juni 1998.

Examenbesprekingen
vbo B:
di. 19 mei 1998.
vbo/mavo C/D:
ma. 25 mei 1998.
havo wiskunde A:
wo. 20 mei 1998.
havo wiskunde B:
vr. 29 mei 1998.
vwo wiskunde A:
ma. 25 mei 1998.
vwo wiskunde B:
wo. 20 mei 1998.
Zie voor een uitgebreid overzicht het volgende nummer van Euclides

Regionale bijeenkomsten TWIN
di. 12/di. 19 mei 1998
twin@fi.ruu.nl

HKRWO-symposium: Leren door doen
za. 30 mei 1998
Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs
E. de Moor:
020 - 6121382
Zie aankondiging blz. 161 in nr. 5

M.C. Escher conferentie
24-28 juni 1998
Rome, Ravello, Italië
www.mat.uniromal.it/escher98

Vierkant Wiskundekampen
Lunteren
10 - 14 augustus 1998:
Origo: 10 t/m 12 jaar
Béta: 12 t/m 14 jaar
Triangle: 14 t/m 17 jaar
Exponent: 17 t/m 19 jaar
Voor meer informatie:
Vierkant: 020 - 4447776
Zie www-site laatste kolom
Zie aankondiging blz. 200

Internetsites voor wiskundedocenten:

Binnenkort het 33e Nederlandse Mathematisch Congres:
www.math.utwente.nl/~nmc

Zomerkampen en wiskundeclubs, van de zomer en volgend schooljaar?
www.cs.vu.nl/~vierkant

Voor meer informatie over de Pythgoras-Escherprijsvraag:
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras

Suggesties voor interessante sites graag zenden aan
Kees Hoogland
e-mail: cph@xs4all.nl

PASCAL
een nieuwe dimensie

Thieme

hele pagina

(op film bijgeleverd)

Herziene kerndoelen basisvorming,
Tweede Fase havo/vwo

Wolters-Noordhoff biedt u de keuze

Voor elke school een complete wiskundemethode met vier delen voor (i)vbo, vbo-mavo, mavo-havo (-vwo) en havo-vwo *voor de basisvorming* en *nieuwe delen voor de Tweede Fase havo en vwo:*

Moderne wiskunde zevende editie
en
Netwerk tweede editie









Beide methoden doen op hun eigen wijze recht aan de veranderingen van (i)vbo tot en met vwo en bereiden uw leerlingen voor op de examens.

Vraag een beoordelingspakket aan en beoordeel zelf welke methode het best past bij uw school, uw sectie en uw leerlingen.

Wolters-Noordhoff
Elka van de Steeg
voorlichter exact
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Wolters Noordhoff

419/8032